

Série d'exercices N° 0 : Rappel sur les suites numériques réelles

=====

Exercice 1 : Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.

a) Montrer que (u_n) converge en calculant sa limite.

b) En déduire que la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

Solution.

(u_n) une suite réelle définie pour tout entier $n > 1$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

a) Montrons que (u_n) une suite convergente.

On a

$$u_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

(u_n) est une suite croissante majorée par 1, donc elle est convergente, de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

b) On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Déduisons que la suite (v_n) est convergente.

On a

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

donc (v_n) est une suite croissante et on a :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \quad (\text{car } \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k-1}).$$

C'est-à-dire : $v_n \leq 1 + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(v_n) est une suite croissante majorée par une suite convergente donc elle est aussi convergente.

=====

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq q < 1, \quad q > 0$.

Soit (a_n) une suite à termes positifs et bornée. On définit la suite (w_n) par :

$$\begin{cases} w_0 = a_0 \\ w_n = \sum_{k=0}^n a_k u_k^k \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier la nature de la suite (w_n) .

Solution.

$$\text{On a } w_{n+1} - w_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k u_k^k - \sum_{k=0}^n a_k u_k^k = a_{n+1} u_{n+1}^{n+1} \geq 0.$$

La suite (w_n) est donc croissante. De plus la bornitude de la suite (a_n) et l'inégalité $0 \leq u_n \leq q < 1$ entraînent que

$$w_n = \sum_{k=0}^n a_k u_k^k \leq M \sum_{k=0}^n q^k = M \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \leq \frac{M}{1 - q} < +\infty,$$

où M est un majorant de la suite (a_n) . Alors la suite (w_n) est croissante majorée, donc elle converge.

Exercice 3 : Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \quad ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l .

Solution.

On a :

- (u_n) est une suite croissante, en effet :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.$$

- (v_n) est une suite décroissante, en effet :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n.n!} = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n.n!} = 0.$

Alors, (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Par conséquent, elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite notée l .