

Nom : Prénom :

Matricule : Groupe :

Exercice 1 (7 points) :a) Calculer les rayons de convergence R_1 de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^{n+1}} x^n$ et R_2 de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} x^n$.b) En déduire le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{2^{n+1}} - \frac{4}{3^{n+1}} \right) x^n$.c) Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{2^{n+1}} - \frac{4}{3^{n+1}} \right) x^n$.

Réponse.

=====

Exercice 2 (8 points) : Soit f la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0], \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
- b) Écrire la série de Fourier σf associée à f et étudier sa convergence en $x = \frac{\pi}{2}$.
- c) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Indication. Noter que $\sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

=====

Réponse.