

Série d'exercices N° 0 : Rappel sur les suites numériques réelles

Exercice 1 : Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.

a) Montrer que (u_n) converge en calculant sa limite.

b) En déduire que la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq q < 1, q > 0$.

Soit (a_n) une suite à termes positifs et bornée. On définit la suite (w_n) par :

$$\begin{cases} w_0 = a_0 \\ w_n = \sum_{k=0}^n a_k u_k^k \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier la nature de la suite (w_n) .

Exercice 3 : Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \quad ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l .