

Série d'exercices N° 2 : Suites et séries de fonctions**Exercice 1 :** Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2 :** Étudier la convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{3^n} \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Log} x)^n \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2} \quad 4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right).$$

**Exercice 3 :** Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$  mais qu'elle n'est pas uniformément convergente sur  $[-1, 1]$ .Exercices supplémentaires**Exercice 1 :** Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes.

$$1) f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) f_n(x) = \cos \frac{nx}{n+1}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$3) f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |x| < \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1} (1 - |x|) & \text{si } \frac{1}{n} \leq |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}.$$

**Exercice 2 :** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \cos \frac{x}{n}$ .a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .b) Comparer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$  et  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ .**Exercice 3 :** Étudier la convergence simple et uniforme des séries de fonctions suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^2} \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2} \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx}{e^{nx}} \quad 4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} - x^{2n+1}).$$

**Exercice 4 :** Calculer

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^x} \quad 2) \lim_{x \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(1+x^n)}.$$