

Nom : ..... Matricule : .....

Prénom : ..... Groupe : .....

=====

Exercice 1 (5 points) : Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

=====

Réponse.

=====

**Exercice 2 (5 points) :**

a) Étudier la convergence et la convergence absolue de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

b) Calculer les sommes partielles  $S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n} \text{Log} \left( 1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$  et  $S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \text{Log} \left( 1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$ ,

puis en déduire la nature de la série  $\sum_{n=2}^{+\infty} \text{Log} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ .

=====

**Réponse.**

=====

**Exercice 3 (5 points) :**

- a) Calculer le rayon de convergence  $R$  de  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1) x^n$  et étudier sa convergence en  $x = \pm R$ .
- b) Calculer les sommes  $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ . *Indication.* Noter que  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in ]-R, R[$ .
- c) En déduire la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1) x^{2n}$ .
- =====

**Réponse.**

=====

**Exercice 4 (5 points) :** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\pi, 0], \\ x & \text{si } x \in ]0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de la fonction  $f$  pour  $x \in [-3\pi, 3\pi]$ .
- b) Calculer les coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  puis en déduire  $a_{2n}$ ,  $a_{2n+1}$ ,  $b_{2n}$  et  $b_{2n+1}$ .
- c) Écrire la série de Fourier  $\sigma f$  associée à  $f$  et étudier sa convergence en  $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ .
- d) En déduire les sommes des séries numériques  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .
- =====

**Réponse.**