

Série d'exercices pour se préparer à l'examen finale**Exercice 1** : Donner la nature des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{Log} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}} \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}}.$$

**Exercice 2** : Étudier la convergence des séries numériques suivantes en calculant leur somme.

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{3^n} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

**Exercice 3** : Déterminer le rayon de convergence et la nature pour  $x = \pm R$  des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \text{Log} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) x^n \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + n} x^{2n-1}.$$

**Exercice 4** : Calculer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n+1} \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} x^n \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!} x^n.$$

**Exercice 5** :a) Calculer le rayon de convergence  $R$  de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n!} x^n$ .b) On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n!} x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $x \in ]-R, R[$ .Montrer que  $f(x) = (x^2 + 5x - 1)g(x)$ .Indication. Noter que  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{n!}$ .c) En déduire la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n!} x^n$ . Indication. Noter que  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ .**Exercice 6** : Donner le développement en séries entières des fonctions suivantes et donner le domaine de convergence.

$$1) f(x) = \frac{3}{1+x-2x^2} \quad 2) f(x) = \text{Log}(1-x^2) \quad 3) f(x) = (x^2+1)e^x \quad 4) f(x) = e^x + \sin x.$$

**Exercice 7 :**

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\pi, 0], \\ x & \text{si } x \in ]0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de la fonction  $f$  pour  $x \in [-3\pi, 3\pi]$ .
- b) Écrire la série de Fourier  $\sigma f$  associée à  $f$ .
- c) En déduire les sommes des séries numériques  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[, \\ -1 & \text{si } x \in ]-\pi, 0[. \end{cases}$$

- a) Représenter  $f$  sur 2 périodes.
- b) Calculer sa série de Fourier  $\sigma f$  et étudier sa convergence.
- c) En déduire les sommes des séries numériques  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .