**U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 1** **Math 3 : Séries**

**Faculté de Mathématiques** **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST, Sections D et L**

## Série d'exercices N° 4 : Séries de Fourier

**Exercice 1 :**

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right[, \\ 1-x & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right[. \end{cases}$$

**a)** Représenter $f$ sur 3 périodes.

**b)** Écrire la série de Fourier associée à $f$.

**c)** En déduire les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Exercice 2 :**

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$.

**a)** Écrire la série de Fourier associée à $f$.

**b)** En déduire les sommes des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

**Exercice 3 :**

Développer en série de Fourier la fonction $2\pi$-périodique, impaire, définie par

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi].$$

En déduire les sommes des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

**Exercice 4 :**

Déterminer le développement en série de Fourier pour la fonction $f$, $2\pi$-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.