USTHB 2015-2016 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Fonctions de plusieurs variables
3ème année LAC

Examen final - 10 janvier 2016. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/ **20**

Exercice 1 (4 pts.) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

b) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, puis discuter le résultat.

Réponse.

Exercice 2 (4,5 pts.) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

a) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(1, 1)$.

b) Montrer que $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(0, -1)$.

c) Déterminer les extrema locaux de la fonction f.

Réponse.

Exercice 3 (5 pts.) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons le quart de disque $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$ et le carré $C_n = \{0 \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq n\}$.

a) En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, calculer les intégrales $J_n = \iint\limits_{D_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$ et $J_{2n} = \iint\limits_{D_{2n}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$.

b) En déduire les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{2n}$.

c) Considérons les intégrales $K_n = \iint\limits_{C_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$ et $I_n = \int\limits_0^n e^{-x^2} dx$. Vérifier que $K_n = (I_n)^2$.

d) D'après un dessin de D_n, C_n et D_{2n}, expliquer pourquoi $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.

e) En déduire l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Réponse.

Exercice 4 (3 pts.) : 1) En utilisant le changement en coordonnées sphériques, calculer les volumes :

a) $V_1 = \iiint\limits_{D_1} dxdydz,$ D_1 est la demi-boule supérieure de centre $(0,0,0)$ et de rayon 3.

b) $V_2 = \iiint\limits_{D_2} dxdydz,$ D_2 est la demi-boule inférieure de centre $(1,0,0)$ et de rayon 1.

2) En déduire le volume du solide

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ z \geq 0) \ \text{et} \ \left((x-1)^2 + y^2 + z^2 \geq 1,\ z \leq 0\right)\right\}.$$

Réponse.

Exercice 5 (3,5 pts.) : **a)** Montrer que le problème de Cauchy $y' = \dfrac{1}{1+ty}$ avec $y(0) = 0$, possède une solution maximale unique.

b) Montrer que y est une fonction impaire. **c)** Étudier la monotonie et le signe de y.

Réponse.