Chapitre 5

Formes différentielles, intégrales curviligne et de surface

Sommaire

5.1 Formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$

5.1.1 Formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$

Définition 119 (Forme p-linéaire)

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*$ est une forme p-linéaire ou multilinéaire d'ordre p (lorsque $p = 2$, on dit bilinéaire) si elle est linéaire en chaque variable, c'est-à-dire pour $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, ..., p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$f(u_1, ..., u_{i-1}, \lambda u_i + \mu v_i, u_{i+1}, ..., u_p) =$$
$$\lambda f(u_1, ..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ..., u_p) + \mu f(u_1, ..., u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, ..., u_p).$$

Définition 120 (Forme p-linéaire alternée)

Une forme p-linéaire est dite *alternée* si elle change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs, c'est-à-dire pour $v_i, v_j \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i < j \leq p$ on a

$$f(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ...v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, ..., v_p) = -f(v_1, ..., v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, ...v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, ..., v_p).$$

Notation 3

On désignera par $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace des formes p-linéaires et par $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes p-linéaires alternées.

Exemple 35

Un des exemples les plus connus pour les formes multilinéaires alternées est le déterminant des matrices carrées d'ordre n. ▪

Pour une forme multilinéaire quelconque f on associe une forme multilinéaire alternée $\mathrm{Alt}\, f$ définie par

$$\mathrm{Alt}\, f(v_1, ..., v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma f\left(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}\right),$$

où S_p est l'ensemble des toutes les permutations de $\{1, 2, ..., p\}$.

Définition 121 (Produit tensoriel)

Soient f et g deux formes multilinéaires d'ordre p et r respectivement. On appelle produit tensoriel de f et g noté $f \otimes g$ la $(p + r)$-forme linéaire définie par

$$f \otimes g(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+r}) = f(v_1, ..., v_p)\, g(v_{p+1}, ..., v_{p+r}).$$

Si $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, ..., p$, sont des formes linéaires, on peut définir une forme multilinéaire alternée f par

$$f(v_1, ..., v_p) = \det\left((g_i(v_j))_{1\leq i,j\leq p}\right).$$

On note $f = g_1 \wedge g_2 \wedge ... \wedge g_p$ et on l'appelle produit extérieur des formes $g_i, i = 1, ..., p$.

Définition 122 (Produit extérieur des formes multilinéaires)

Pour deux formes multilinéaires quelconques f et g on définit le produit extérieur de f et g par $f \wedge g = \mathrm{Alt}(f \otimes g)$.

Définition 123 (Base duale)

Si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on définit la base duale $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, ..., n.$$

Proposition 124

Les $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ formes p-linéaires alternées $\left\{e_{i_1}^* \wedge ... \wedge e_{i_p}^*\right\}_{1\leq i_1<...<i_p\leq n}$ forment une base de l'espace des formes p-linéaires alternées $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

Notation 4

On note les éléments de la base duale par dx_i au lieu de e_i^*.

Définition 125 (Produit extérieur des formes multilinéaires alternées)

Soient f et g deux formes multilinéaires alternées d'ordre p et r respectivement.

$$f = \sum_{1\leq i_1<...<i_p\leq n} f_{i_1,...,i_p} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \quad g = \sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq n} g_{i_1,...,i_r} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r}.$$

On définit la $(p + r)$-forme linéaire alternée par

$$f \wedge g = \sum_{\substack{1\leq i_1<...<i_p\leq n \\ 1\leq j_1<...<j_r\leq n}} f_{i_1,...,i_p} g_{j_1,...,j_r} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_r}.$$

Parmi les propriétés de ce produit, il est associatif, distributif par rapport à l'addition et il n'est pas commutatif, mais il satisfait

$$g \wedge f = (-1)^{p\,r} f \wedge g.$$

En particulier $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. De cette propriété on déduit que si f est une forme multilinéaire alternée d'ordre p impair alors $f \wedge f = 0$ et en particulier $dx_i \wedge dx_i = 0$.

5.1.2 Formes différentielles

Définition 126

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et p, k deux entiers naturels. On appelle forme différentielle d'ordre p et de classe $\mathcal{C}^k$ sur U toute application ω de U vers l'ensemble des formes p-linéaires alternées

$$\begin{aligned} \omega : \quad U \quad & \rightarrow \Lambda^p\left(\mathbb{R}^n\right) \\ x \quad & \mapsto \omega\left(x\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}\left(x\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \end{aligned}$$

où $f_{i_1,\ldots,i_p}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Toute fonction f définie sur U est une forme différentielle d'ordre 0.

Exemple 36

Une forme différentielle ω d'ordre 1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ est donnée par $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ où P, Q et R sont des fonctions sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$. ∎

Exemple 37

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, alors $x \mapsto df\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right) dx_i$ est une forme différentielle d'ordre 1 sur U. ∎

Produit extérieur de deux formes différentielles

Soient ω et α deux formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^n$ d'ordres respectifs p et r. La définition du produit extérieur des formes multilinéaires alternées s'étend aux formes différentielles, c'est-à-dire si

$$\omega\left(x\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}\left(x\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \quad \text{et} \quad \alpha\left(x\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} g_{i_1,\ldots,i_r}\left(x\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r},$$

alors

$$(\omega \wedge \alpha)(x) = \omega(x) \wedge \alpha(x) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n}} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, g_{j_1,\ldots,j_r}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r}.$$

Exemple 38

Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, alors le produit extérieur des formes différentielles d'ordre 1, $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ et $dg = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$ est une forme différentielle d'ordre 2,

$$(df \wedge dg)(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)(x)\, dx_i \wedge dx_j.$$

En particulier si $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}(df \wedge dg)(x,y,z) = & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \right)(x,y,z)\, dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} \right)(x,y,z)\, dx \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} \right)(x,y,z)\, dy \wedge dz.\end{aligned}$$

De cette formule on déduit que $df \wedge df = 0$ et en particulier $dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0$ et $dz \wedge dz = 0$. ▪

Différentielle extérieure

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, p, k deux entiers naturels et ω une forme différentielle d'ordre p et de classe $\mathcal{C}^k$ sur U,

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

On définit la différentielle extérieur de ω comme étant la $(p+1)$-forme différentielle définie par

$$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}(x) \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Ceci définit une application d de l'espaces des formes différentielles d'ordre p dans l'espaces des formes différentielles d'ordre $p+1$.

Exemple 39

Si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, alors

$$\begin{aligned}d\omega(x,y,z) = & \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x,y,z)\, dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right)(x,y,z)\, dx \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)(x,y,z)\, dy \wedge dz.\end{aligned}$$

▪

Voici les propriétés fondamentales de la différentielle extérieure.

Proposition 127

Soient ω et α deux formes différentielles d'ordres respectifs p et r et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors on a

1. $d(\omega + \alpha) = d\omega + d\alpha$.
2. $d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge d\alpha$.
3. $d(d\omega) = 0$.

Définition 128 (Formes différentielles fermée et exacte)

Soit ω une forme différentielle d'ordre p et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

- On dit que ω est fermée si $d\omega = 0$.
- On dit que ω est exacte s'il existe une forme différentielle α telle que $d\alpha = \omega$.

On remarque que si ω est une forme différentielle exacte, alors elle est fermée. La réciproque est fausse en général. Mais il existe un résultat sous certaines conditions. Avant d'énoncer ce résultat nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 129 (Ouvert étoilé)

Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$, le segment $[a, x] = \{\lambda x + (1-\lambda) a \ / \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est contenu dans U.

Théorème 130 (Lemme de Poincaré)

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme différentielle fermée sur U est exacte.

Exemple 40

Soit la forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\omega(x, y, z) = (-2y + yz)\, dx \wedge dy + 2x dx \wedge dz - xy dy \wedge dz$. On a $d\omega(x, y, z) = (y - 0 - y)\, dx \wedge dy \wedge dz = 0$. D'après le lemme de Poincaré, il existe une forme différentielle α telle que $d\alpha = \omega$. Vérifier que $\alpha(x, y, z) = (y^2 - 2xz)\, dx + xyz dy$ satisfait cette condition. ∎

Transposition par une application

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et $\phi : V \subset \mathbb{R}^m \to U \subset \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Soit ω une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^n$ d'ordre p définie par

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

On appelle transposée de la forme différentielle ω, la forme différentielle du même ordre p et définie sur V par

$$\phi^*\omega(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(\phi(u))\, d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}.$$

Exemple 41

Si $\omega = dx \wedge dy$ et $\phi(r,u,v) = (x,y,z) = (r\cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$, alors

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega(r,u,v) &= d(r\cos u\cos v) \wedge d(r\sin u\cos v) \\
&= (\cos u\cos v dr - r\sin u\cos v du - r\cos u\sin v dv) \wedge \\
&\qquad\qquad (\sin u\cos v dr + r\cos u\cos v du - r\sin u\sin v dv) \\
&= r\cos^2 v dr \wedge du + r^2 \sin v\cos v du \wedge dv.
\end{aligned}$$

■

Voici les propriétés fondamentales de la transposition.

1. $\phi^*(\omega + \alpha) = \phi^*\omega + \phi^*\alpha$.
2. $\phi^*(\omega \wedge \alpha) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\alpha$.
3. $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.
4. $(\phi \circ \theta)^*\omega = \theta^*(\phi^*\omega)$.

Les opérateurs gradient, divergence et rotationnel

Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre. On les rencontre en particulier

- En mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes).
- En électromagnétisme, où ils permettent d'exprimer les propriétés du champ électromagnétique.
- Ainsi que dans toute la physique mathématique (propagation, diffusion, résistance des matériaux, ...).

Définition 131 (Champ de vecteurs)

Soit U un ensemble de $\mathbb{R}^n$. On appelle champ de vecteurs ou champ vectoriel sur U, toute application de U dans $\mathbb{R}^m$. C'est-à-dire on associe un vecteur dans $\mathbb{R}^m$ à chaque point de U.

Définition 132 (Gradient)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le gradient de f est le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \text{ où } x = (x_1, ..., x_n).$$

Exemple 42

Si $f(x,y,z) = 3xy^2z$, alors $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = (3y^2z, 6xyz, 3xy^2)$. ∎

Définition 133 (Divergence et rotationnel)

Soit V un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On pose $V(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Le divergence de V est donné par

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Le rotationnel de V est

$$\operatorname{Rot} V = \nabla \wedge V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge (P, Q, R) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Exemple 43

Si $V(x,y,z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$, alors

$\operatorname{div} V(x,y,z) = 0$ et $\operatorname{Rot} V(x,y,z) = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)$. ∎

Remarque 134

En termes des formes différentielles, si $V = (P, Q, R)$, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ et $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$, alors $\operatorname{div} V = d\omega$ et $\operatorname{Rot} V = d\alpha$.

Définition 135 (Dérivé du potentiel)
Soit V un champ de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $V = \operatorname{grad} f$, on dit que V dérivé du potentiel f.

Les opérateurs précédentes ont les propriétés suivantes.

1. Si f est classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors $\operatorname{Rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.
2. Si V est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors $\operatorname{div}(\operatorname{Rot} V) = 0$.
3. Si $V = \operatorname{grad} f$, alors $\operatorname{Rot} V = 0$.
4. Si $V = \operatorname{Rot} X$, alors $\operatorname{div} V = 0$.

5.2 Intégration de formes différentielles

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et d'ordre p, définie par

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} f_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, x \in U.$$

Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^p \to U \subset \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Le transposée de ω est une forme différentielle d'ordre p définie sur $D \subset \mathbb{R}^p$ et donnée par

$$\phi^* \omega(u) = h(u)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_p,$$

où h est une fonction réelle définie sur $D \subset \mathbb{R}^p$.

Définition 136 (Intégrale d'une forme différentielle)
On dit que la forme différentielle ω est intégrable sur ϕ si la fonction h est intégrable sur D. On définit alors l'intégrale de ω sur ϕ par $\int_\phi \omega = \int_D h(u)\, du$, où l'intégrale sur D est une intégrale multiple.

Pour $p = 1$ on l'appelle intégrale curviligne et pour $p = 2$ on l'appelle intégrale de surface. On s'intéresse ici par ces deux cas particuliers d'intégrales.

Avant d'aborder ces intégrales on jette un coup d'oeil sur les courbes et surfaces paramétrées.

5.2.1 Courbes et surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette section, on va donner quelques notions de base sur les courbes et les surfaces paramétriques régulières.

Chemins et courbes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 137 (Chemin de $\mathbb{R}^n$)

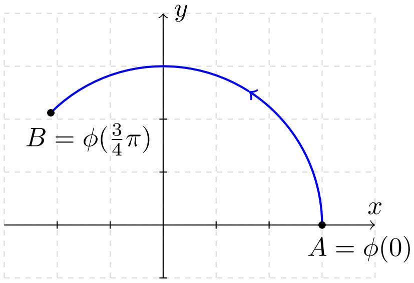
Un chemin ou arc de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ est défini comme étant une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$, vers $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \phi : \quad I \subset \mathbb{R} \quad &\to \mathbb{R}^n \\ t \qquad &\mapsto \phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_n(t)) . \end{aligned}$$

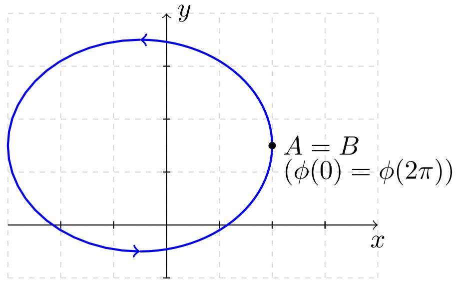
1. Si $I = [a, b]$, $a < b$, les points initial $A = \phi(a)$ et final $B = \phi(b)$ sont appelés respectivement l'origine et l'extrémité de ϕ.
2. Dans le cas où les points initial et final coïncident i.e. $\phi(a) = \phi(b)$, on dit que le chemin ϕ est fermé ou est un lacet.
3. On note le chemin ϕ par (I, ϕ).

Exemple 44

Les fonctions $\phi(t) = (3\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$ et $\phi(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t, \frac{3}{2} + \sin t\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ définies des chemins dans le plan.



$\phi(t) = (3\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$.



$\phi(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t, \frac{3}{2} + 2\sin t\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. ■

Définition 138 (Courbe paramétrée)

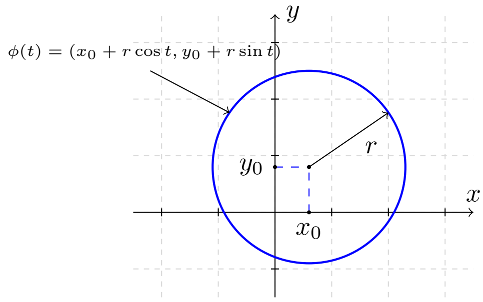
L'image $\gamma = \phi(I) = \{\phi(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \in I\}$ s'appelle support de ϕ ou courbe dans $\mathbb{R}^n$ paramétrée par la fonction ϕ.

Souvent on confond le chemin avec son support et on dit que γ est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 45

Le cercle dans le plan de centre (x_0, y_0) et de rayon r est une courbe paramétrée par la fonction

$$\phi(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t), \ 0 \le t \le 2\pi.$$



Cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r ∎

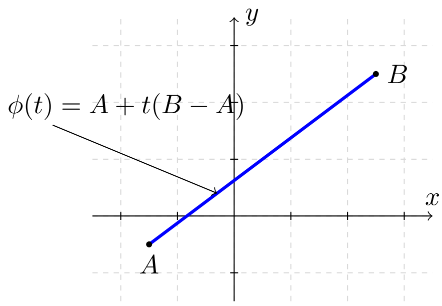
Exemple 46

Le segment d'extrémités A et B noté $[A, B]$ est une courbe paramétrée par la fonction

$$\phi(t) = (1-t)A + tB, \ 0 \le t \le 1,$$

ou

$$\phi(t) = A + t(B - A), \ 0 \le t \le 1.$$



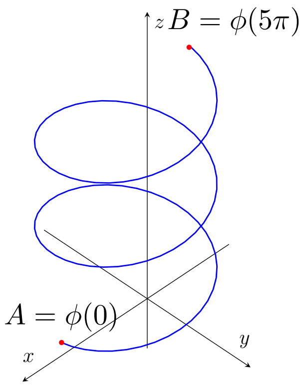
Segment d'extrémités A et B ∎

Exemple 47

La fonction

$$\phi(t) = (1 + 3\cos t, 2\sin t, 1 + t), \ 0 \le t \le 5\pi$$

représente une courbe paramétrique dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

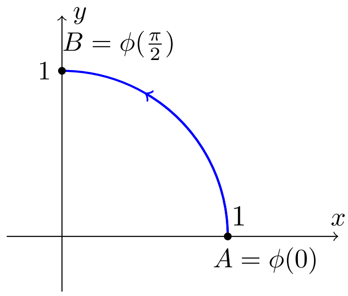


∎

Définition 139

- On dit que deux chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe une bijection $g : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$, ainsi que sa réciproque, telle que $\phi = \psi \circ g$.
- La fonction g, qui est strictement monotone, est appelée changement de paramètre.
- On dit que g est un changement de paramètre admissible de $\gamma = \phi(I)$ si $k \ge 1$.
- Si la fonction g est strictement croissante, on dit que les chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont de même orientation.

Exemple 48



$\boxed{\phi(t) = (\cos t, \sin t)\,,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.}$

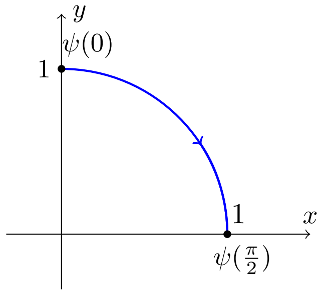
Soit γ la courbe paramétrée par le chemin

$$\begin{aligned} \phi : \ \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \phi(t) = (\cos t, \sin t)\,. \end{aligned}$$

Le sens de l'orientation de γ induite par ϕ est de $A = \phi(0)$ vers $B = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Le chemin

$$\begin{aligned} \psi : \ \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \phi(t) = (\sin t, \cos t) \end{aligned}$$



$\boxed{\psi(t) = (\sin t, \cos t)\,,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.}$

admet le même support que celui de ϕ, i.e. $\phi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \psi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, mais l'orientation définie par ϕ est opposée à l'orientation définie par ψ.

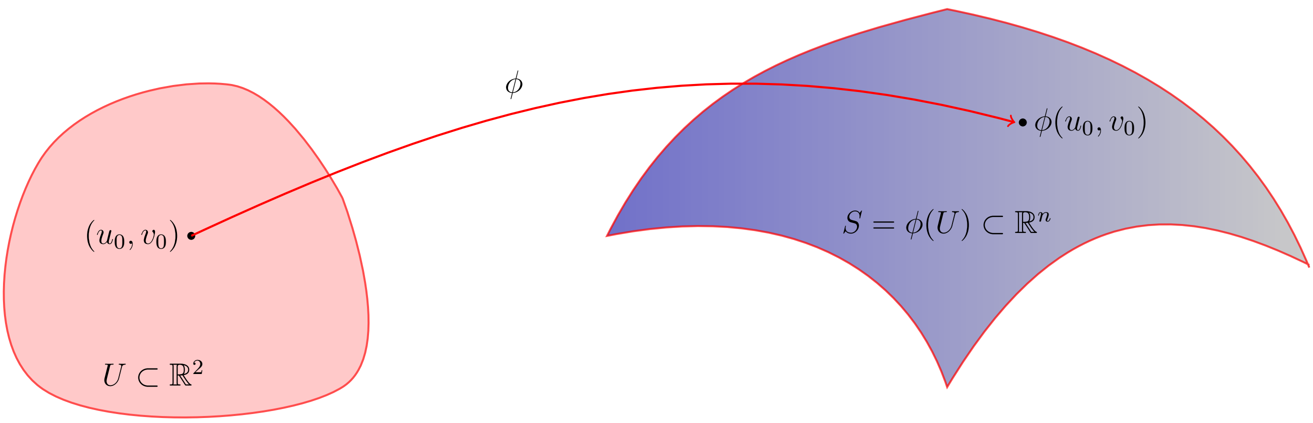
Le changement de paramètre $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est défini par $g(t) = \frac{\pi}{2} - t$. ∎

Surfaces paramétrées

Définition 140

Une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

$$\begin{aligned} \phi : \ U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^n \\ (u, v) &\mapsto \phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \ldots, \phi_n(u, v))\,. \end{aligned}$$



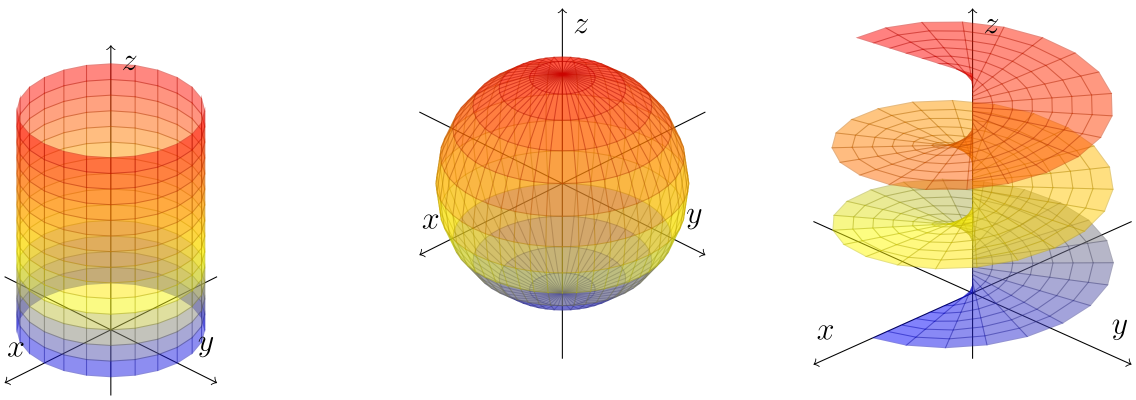
Définition 141 (Surface paramétrée)
L'image $S = \phi(U) = \{\phi(u,v) \in \mathbb{R}^n,\ (u,v) \in U\}$ s'appelle support géométrique de la surface paramétrée ϕ.

Exemple 49
Le cylindre, la sphère et l'hélicoïde dans $\mathbb{R}^3$ sont paramétrés respectivement par les fonctions

$$\phi(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)\,, u \in [0, 2\pi[\,, v \in I \subset \mathbb{R},$$

$$\varphi(u,v) = (r\cos u\sin v, r\sin u\sin v, r\cos v)\,, u \in [0, 2\pi[\,, v \in [0, \pi[\,,$$

$$\psi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)\,, \quad (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$



Cylindre Sphère Hélicoïde

∎

- Si pour $(u_0, v_0) \in U$ les vecteurs $\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendants, le plan qu'ils engendrent est le plan tangent à la surface au point (u_0, v_0).
- Leur produit vectoriel $\eta(u_0, v_0) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ est un vecteur normal à la surface (orthogonal au plan tangent).
- Le vecteur unitaire $n(u_0, v_0) = \frac{\eta(u_0,v_0)}{\|\eta(u_0,v_0)\|}$ s'appelle la normale orientée au point (u_0, v_0).

Comme dans le cas des courbes, si $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ est une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ et $g : V \subset \mathbb{R}^2 \to U$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, alors $\phi = \psi \circ g$ est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique que ψ.
Si $k \geq 1$, on dit que g est un changement de variable admissible et que $\phi = \psi \circ g$ est une reparamétrisation de ψ.

5.2.2 Intégrale curviligne

Soit γ une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ par le chemin $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. On peut définir l'intégrale curviligne d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou d'une forme différentielle ω d'ordre 1.

Définition 142

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale curviligne de f sur la courbe γ paramétrée par $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est définie comme étant $\int_\phi f = \int_a^b f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \, dt$ où $\|\phi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\phi_i'(t))^2} = \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + ... + (\phi_n'(t))^2}$.

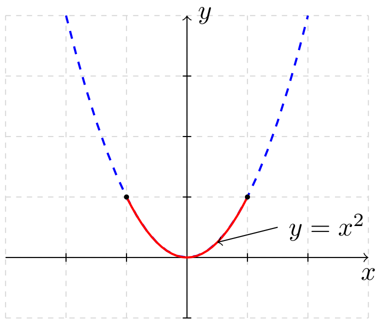
Remarque 143

1. La définition précédente ne dépend pas du choix de représentation paramétrique de γ.
2. Pour $f \equiv 1$ sur γ, on retrouve la longueur de la courbe γ, $|\gamma| = \int_a^b \|\phi'(t)\| \, dt$.

Exemple 50

Calculons la longueur de la courbe

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\right\}.$$



La courbe C peut être décrite par

$$C = \left\{(x(t), y(t)) = \left(t, t^2\right) \in \mathbb{R}^2, \ t \in [-1,1]\right\}.$$

La longueur de C est

$$|C| = \int_{-1}^{1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2} dt = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \operatorname{Log}\left(\sqrt{5}+2\right). \qquad \blacksquare$$

Maintenant, on définit l'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe.

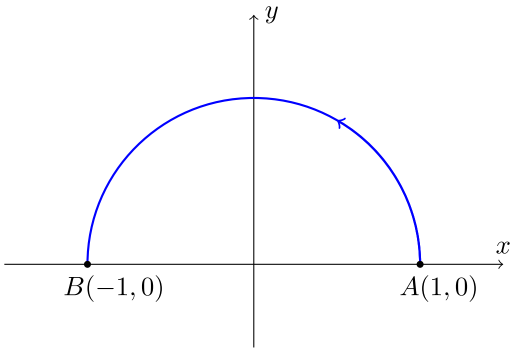
Définition 144

Soit ω une forme différentielle continue d'ordre 1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant $\phi([a,b])$. On note $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \, dx_i$. On définit l'intégrale curviligne de la forme différentielle ω sur le chemin ϕ par

$$\int_\phi \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\phi(t)) \, \phi_i'(t) \, dt.$$

Exemple 51

Calculons l'intégrale $\int_\gamma x^2dx - xydy$ où γ est l'arc demi cercle de centre O et de rayon 1 d'origine $A(1,0)$ et d'extrémité $B(-1,0)$.



On peut paramétrer la courbe orienté γ par

$$\begin{array}{lll}\phi: & [0,\pi] & \to \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t).\end{array}$$

Alors
$$\begin{aligned}\int_\gamma x^2dx - xydy &= \int_0^\pi \left(\cos^2 t(-\sin t) - \cos t \sin t(\cos t)\right) dt \\ &= -2\int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt = \left[\tfrac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi = -\tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$
■

Circulation d'un champ de vecteurs

Définir une forme différentielle ω d'ordre 1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ par $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) dx_i$ revient à définir un champ de vecteurs

$$\begin{array}{lll}V: & U & \to \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto V(x) = (\omega_1(x), ..., \omega_n(x)).\end{array}$$

L'intégrale de la forme ω sur la courbe γ est appelé le travail ou la circulation de ce champ de vecteurs V sur γ, et on écrit

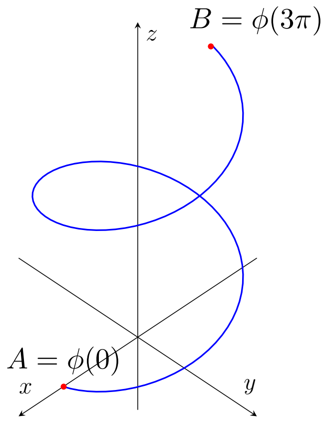
$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) dx_i = \int_\gamma V(x) dx.$$

Si $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ désigne une paramétrisation de γ. On note symboliquement $dx = (dx_1, ..., dx_n) = \phi'(t) dt$. La circulation du champ de vecteurs V le long de γ est donnée alors par

$$\int_\gamma V(x) dx = \int_a^b V(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\phi(t)) \phi_i'(t) dt.$$

Exemple 52

Calculons la circulation I du champ de vecteurs V défini sur $\mathbb{R}^3$ par $V(x,y,z) = (4y, 0, 2z)$, le long de la courbe γ paramétré par



$$\begin{array}{lll}\phi: & [0,3\pi] & \to \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t).\end{array}$$

On a

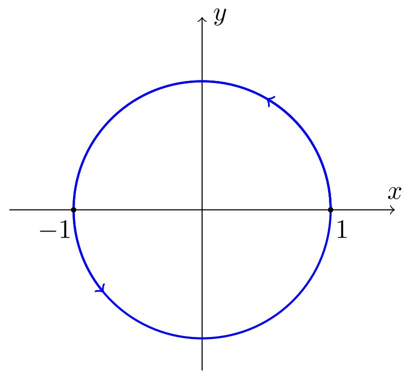
$$\begin{aligned}I &= \int_0^{3\pi} (4\sin t, 0, 2t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left(-4\sin^2 t + 2t\right) dt = \left[\sin(2t) - 2t + t^2\right]_0^{3\pi} = 9\pi^2 - 6\pi.\end{aligned}$$
■

Cas d'une forme différentielle exacte

Si la forme ω est une différentielle exacte (le champ de vecteurs associé dérivant d'un potentiel), alors son intégrale sur une courbe γ ne dépend que des extrémités de cette courbe. En d'autres termes, si $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$, $V(x) = (\omega_1(x), ..., \omega_n(x))$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\nabla f(x) = V(x)$ alors l'intégrale sur γ paramétré par $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la forme différentielle $\omega = df$ est égale à $\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\phi(b)) - f(\phi(a)) = f(B) - f(A)$ où $A = \phi(a)$ désigne l'origine de γ et $B = \phi(b)$ désigne l'extrémité de γ.
En particulier si γ est une courbe fermée i.e. $\phi(a) = \phi(b)$, on a $\int_\gamma \omega = 0$.

Ce résultat est parfois utilisé pour prouver qu'une forme différentielle donnée n'est pas exacte sur un ouvert U donné ; s'il existe une courbe fermée γ telle que $\int_\gamma \omega \neq 0$ alors ω n'est pas exacte.

Exemple 53



Soit ω la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ définie par $\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ et γ le cercle de centre O et de rayon 1. On peut paramétrer la courbe orienté γ par

$$\begin{aligned} \phi : \ & [0, 2\pi] && \to \mathbb{R}^2 \\ & t && \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

On a

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t))\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0,$$

alors ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. ▪

5.2.3 Intégrale de surface

On peut définir l'intégrale de surface pour les fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et pour les formes différentielles d'ordre 2 sur U.

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et S la surface paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ par l'application

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n, n \geq 3.$$

Intégrale de surface d'une fonction

Définition 145 (Intégrale de surface d'une fonction)

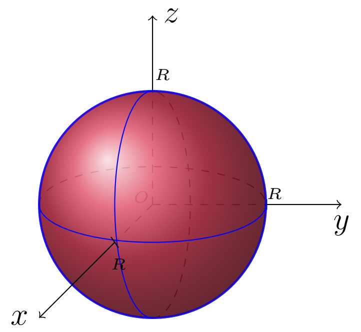
Si f est une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $S = \phi(D)$, son intégrale sur la surface S est définie par

$$\int_S f = \iint_D f(\phi(u,v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Remarque 146 (L'aire d'une surface)

Si $f \equiv 1$ l'intégrale $\int_S f$ est égale à l'aire de S i.e. $Aire(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$.

Exemple 54



Calculons l'aire de la sphère

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = R^2 \right\}.$$

La sphère S peut être paramétrée par l'application

$$\begin{aligned} \phi :\quad D = [0,2\pi[\times [0,\pi[\quad &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \quad &\mapsto (x,y,z)(u,v) = (R\cos u \sin v, R \sin u \sin v, R\cos v). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) &= R^2(-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0) \wedge (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v) \\ &= R^2\left(-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\cos v \sin v\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| &= R^2\sqrt{\cos^2 u \sin^4 v + \sin^2 u \sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} \\ &= R^2\sqrt{\sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} = R^2 \sin v. \end{aligned}$$

D'où

$$Aire(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} R^2 \sin v dv = 4\pi R^2. \quad \blacksquare$$

Intégrale de surface d'une forme différentielle d'ordre 2

Soit ω une forme différentielle d'ordre 2 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $S = \phi(D)$, définie par

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f_{i,j}(x)\, dx_i \wedge dx_j, \quad x = (x_1, ..., x_n).$$

Le transposée de ω est une forme différentielle d'ordre 2 définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ et donnée par

$$\phi^*\omega(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f_{i,j}(\phi(u,v))\, d\phi_i \wedge d\phi_j.$$

Comme

$$\begin{aligned} d\phi_i \wedge d\phi_j &= \left(\tfrac{\partial \phi_i}{\partial u}(u,v)\, du + \tfrac{\partial \phi_i}{\partial v}(u,v)\, dv\right) \wedge \left(\tfrac{\partial \phi_j}{\partial u}(u,v)\, du + \tfrac{\partial \phi_j}{\partial v}(u,v)\, dv\right) \\ &= \tfrac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)}(u,v)\, du \wedge dv, \end{aligned}$$

où $\frac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)} = \det J(\phi_i,\phi_j) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial u} & \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial u} & \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u}\frac{\partial \phi_j}{\partial v} - \frac{\partial \phi_i}{\partial v}\frac{\partial \phi_j}{\partial u}\right)$, alors

$$\phi^*\omega(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f_{i,j}(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)}(u,v)\right) du \wedge dv.$$

Définition 147 (Intégrale de surface d'une forme différentielle d'ordre 2)

Avec les notations précédentes, l'intégrale sur la surface S de la forme différentielle ω est définie par

$$\int_S \omega = \iint_D \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f_{i,j}(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_i,\phi_j)}{D(u,v)}(u,v)\right) dudv.$$

En particulier si ω est une forme différentielle d'ordre 2 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ i.e.

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\, dy \wedge dz + Q(x,y,z)\, dz \wedge dx + R(x,y,z)\, dx \wedge dy$$

et si $\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$, alors

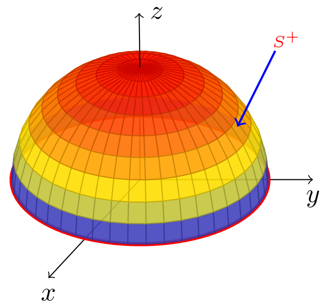
$$\int_S \omega = \iint_D \left(P(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_2,\phi_3)}{D(u,v)} + Q(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_3,\phi_1)}{D(u,v)} + R(\phi(u,v))\, \tfrac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(u,v)}\right) dudv.$$

Si on pose $V = (P, Q, R)$, alors

$$\int_S \omega = \iint_D V(\phi(u,v)) \cdot N(u,v)\, dudv,$$

où $N = \left(\frac{D(\phi_2,\phi_3)}{D(u,v)}, \frac{D(\phi_3,\phi_1)}{D(u,v)}, \frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(u,v)}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}$ est le vecteur normal à la surface S.

Exemple 55



Soit $S^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0\}$ la demi-sphère supérieure du rayon 2 centrée à l'origine.
Calculons l'intégrale $I = \iint\limits_{S^+} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.
La demi-sphère S^+ peut être paramétrée par l'application

$$\begin{aligned} \phi :\quad D = [0, 2\pi[\times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \qquad &\mapsto (x,y,z)(u,v) = (2\cos u \sin v, 2\sin u \sin v, 2\cos v)\,. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} du \wedge dv = \det \begin{bmatrix} 2\cos u \sin v & 2\sin u \cos v \\ 0 & -2\sin v \end{bmatrix} du \wedge dv \\ &= -4\cos u \sin^2 v du \wedge dv. \end{aligned}$$

De la même façon on obtient

$$dz \wedge dx = -4\sin u \sin^2 v du \wedge dv \quad \text{et} \quad dx \wedge dy = -4\cos v \sin v du \wedge dv.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} I &= 8 \iint\limits_D \left((\cos u \sin v)\left(-\cos u \sin^2 v\right) + (\sin u \sin v)\left(-\sin u \sin^2 v\right) + (\cos v)\left(-\cos v \sin v\right)\right) dudv \\ &= -8 \iint\limits_D \left(\cos^2 u \sin^3 v + \sin^2 u \sin^3 v + \cos^2 v \sin v\right) dudv \\ &= -8 \iint\limits_D \left(\sin^3 v + \cos^2 v \sin v\right) dudv = -8 \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv = -16\pi. \end{aligned}$$

■

5.3 Formules de Stokes, de Green-Riemann et d'Ostrogradski

Le théorème fondamental du calcul intégral affirme que l'intégrale d'une fonction f d'une variable réelle définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est égale à la variation d'une primitive F de f sur le bord de l'intervalle i.e. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où $F'(x) = f(x)$.
C'est en fait le cas particulier en dimension 1 du théorème de Stokes, qui exprime l'intégrale sur le bord d'un domaine de $\mathbb{R}^p$, en termes d'une intégrale sur l'intérieur de ce domaine.

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$ et d'ordre $p \leq n$ et soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^p \to U \subset \mathbb{R}^n$ une application injective de classe $\mathcal{C}^k$. L'ensemble $M = \phi(D) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ est appelé sous-variété différentielle orientée de dimension p. La formule générale de Stokes est

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

où $d\omega$ désigne la dérivée extérieure de ω et ∂M le bord de M, muni de l'orientation sortante.

Les formules suivantes de Green-Riemann et d'Ostrogradski sont des cas particuliers de la formule générale de Stokes.

5.3.1 Formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann établit une relation entre l'intégrale d'une forme différentielle ω d'ordre 1 sur une courbe fermée simple γ de $\mathbb{R}^2$ et une intégrale double sur le domaine intérieur à γ. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, cette formule peut être vu comme un analogue du théorème fondamental du calcul intégral pour les fonctions d'une variable.
Avant d'énoncer cette formule nous avons besoin des définitions suivantes.

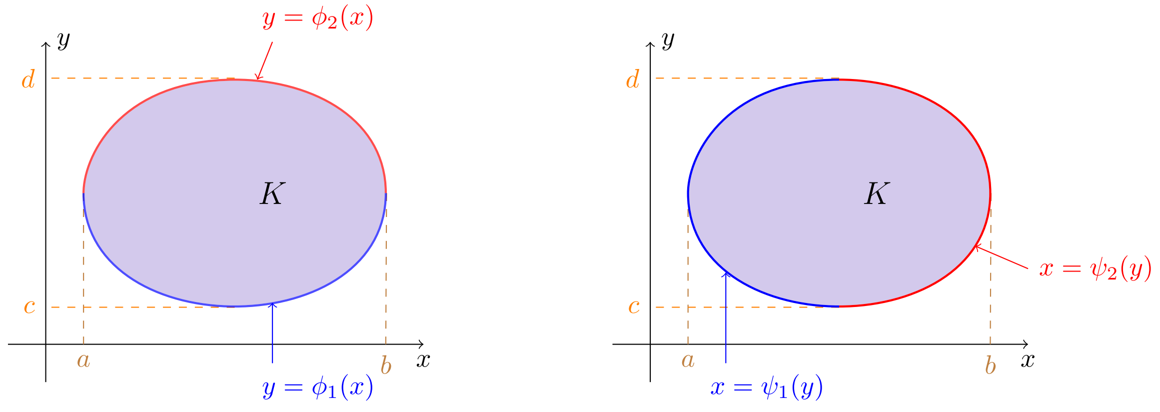
Définition 148 (Compact élémentaire)
On appelle compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$ tout compact K pouvant être défini à la fois par les ensembles suivantes.

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

et

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

où ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions continues.

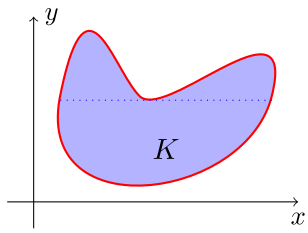


Exemple 56

Les rectangles, les disques et les ellipses sont des compacts élémentaires. ∎

Définition 149 (Compact simple)

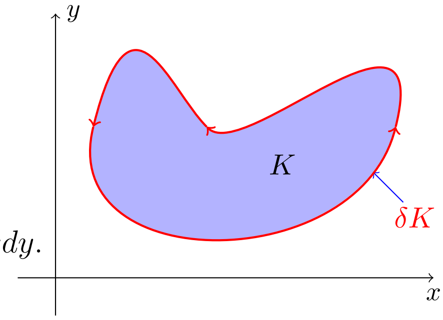
On appelle compact simple tout compact décomposable en un nombre fini de compacts élémentaires au moyen de parallèles aux axes.



Théorème 150 (Théorème de Green-Riemann)

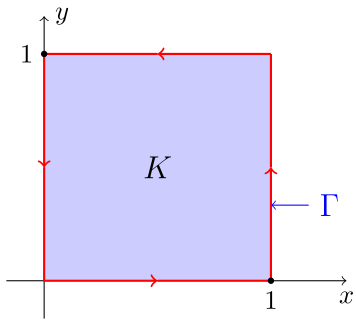
Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle d'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant un compact simple K. Si δK désigne le bord orienté de K on a

$$\int\limits_{\delta K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{K} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy.$$



Exemple 57

Calculons en utilisant la formule de Green $\int_\Gamma x^2dx + xydy$, où Γ est le bord du carré $K = [0,1] \times [0,1]$ parcouru dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre). Posons $P(x,y) = x^2$ et $Q(x,y) = xy$. En utilisant la formule de Green-Riemann, on a



$$\int_\Gamma x^2dx + xydy = \iint\limits_K (y-0)\,dxdy = \int_0^1 ydy \int_0^1 dx = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

L'aire d'un domaine

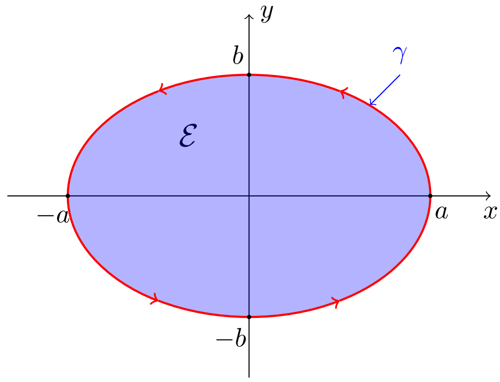
Pour tout compact simple $K \subset \mathbb{R}^2$ on a

$$\int\limits_{\delta K} xdy = \iint\limits_K dxdy \text{ et } \int\limits_{\delta K} ydx = -\iint\limits_K dxdy.$$

L'aire A de K peut donc être calculée à l'aide d'une intégrale curviligne à savoir

$$A(K) = \iint\limits_K dxdy = \int\limits_{\delta K} xdy = -\int\limits_{\delta K} ydx = \int\limits_{\delta K} \tfrac{1}{2}(xdy - ydx).$$

Exemple 58 (L'aire d'une ellipse)



Calculons l'aire de l'ellipse pleine $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Le bord γ de $(\mathcal{E})$ est paramétré par

$$\begin{aligned} \phi : \ [0, 2\pi] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (x(t), y(t)) = (a\cos t, b\sin t). \end{aligned}$$

Ainsi

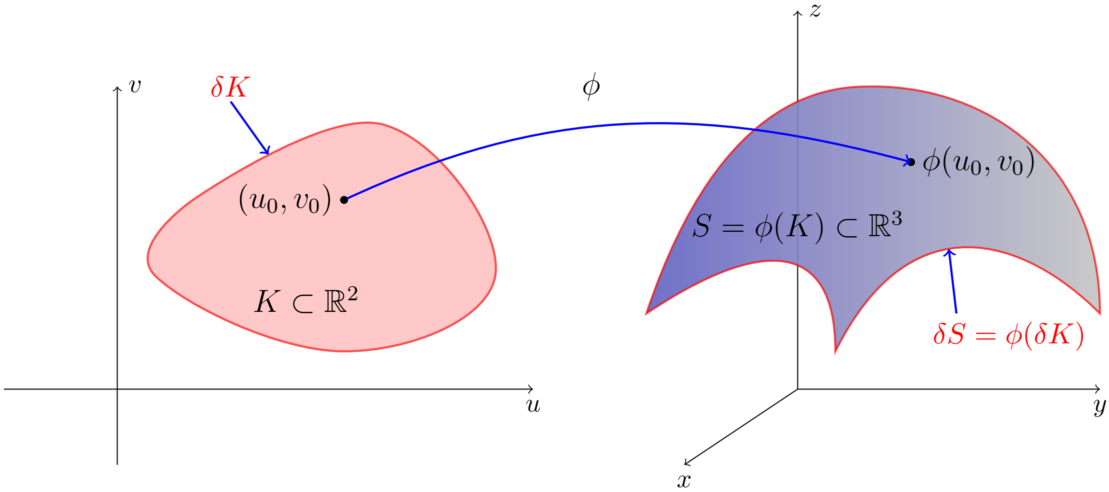
$$\int_\gamma \tfrac{1}{2}(xdy - ydx) = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(a\cos t\,(b\cos t) - b\sin t\,(-a\sin t))\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}ab\right) dt = \pi ab.$$

Par conséquent, $Aire(\mathcal{E}) = \pi ab$. ■

Extension de la formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann s'étend aux formes différentielles d'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Cette formule est appelée formule de Stokes dans $\mathbb{R}^3$.

Soit K un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et S une surface orientée dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par une fonction injective ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $S = \phi(K)$. Le bord δS de S il n'est que l'image par ϕ du bord δK de K i.e. $\delta S = \phi(\delta K)$.



Théorème 151 (Formule de Stokes dans $\mathbb{R}^3$)
Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ une forme différentielle d'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ contenant la surface S parametrée par $\phi : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. On a

$$\int_{\delta S} \omega = \iint_S d\omega.$$

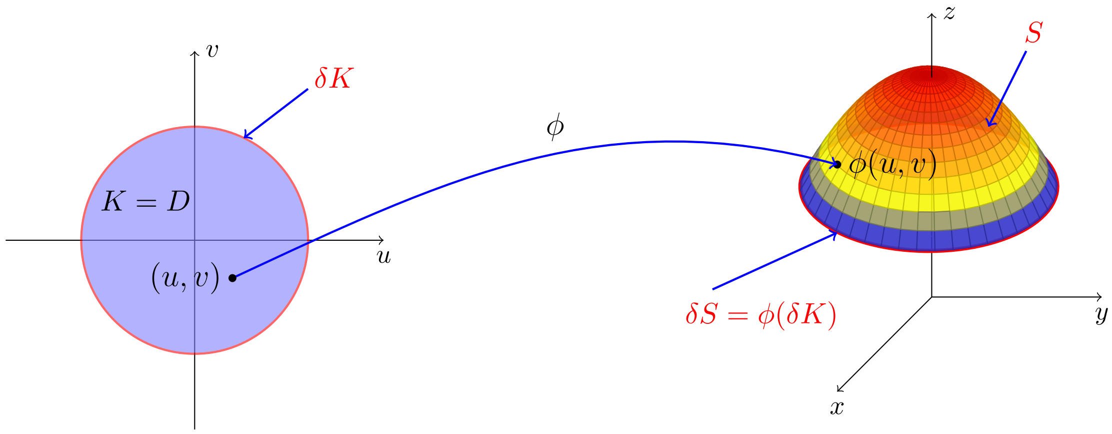
Rappeler que

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz.$$

Exemple 59

Soit $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + v^2 \leq 1\}$ et soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{aligned} \phi : \quad & D && \to \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) && \mapsto (x,y,z)(u,v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2). \end{aligned}$$



Calculons directement et la par formule de Stokes l'intégrale $\int_{\delta S} ydx + zdy + xdz$.

La courbe δS peut être paramétrée par le chemin

$$\begin{aligned} \psi : \quad & [0, 2\pi] && \to \mathbb{R}^3 \\ & t && \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 1). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\delta S} ydx + zdy + xdz &= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) + 1(\cos t) + \cos t(0)]\, dt \\ &= \left[-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin(2t) + \sin t\right]_0^{2\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

Par la formule de Stokes on a

$$\begin{aligned} \int_{\delta S} ydx + zdy + xdz &= \iint_S d(ydx + zdy + xdz) = \iint_S -dx \wedge dy + dx \wedge dz - dy \wedge dz \\ &= \iint_D (-1 - 2v - 2u)\, dudv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-1 - 2r\sin\theta - 2r\cos\theta)\, rdrd\theta = -\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.3.2 Formule d'Ostrogradski

Théorème 152 (Théorème d'Ostrogradsky)

Soit $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy$ une forme différentielle d'ordre 2 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^3$ contenant un compact simple K. Si δK désigne le bord orienté de K on a

$$\iint\limits_{\delta K} P dy\wedge dz + Q dz\wedge dx + R dx\wedge dy = \iiint\limits_{K}\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}+\tfrac{\partial Q}{\partial y}+\tfrac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Remarque 153

Si on pose $V=(P,Q,R)$ et $d\sigma=(dy\wedge dz, dz\wedge dx, dx\wedge dy)$ alors la formule d'Ostrogradski s'écrit sous la forme

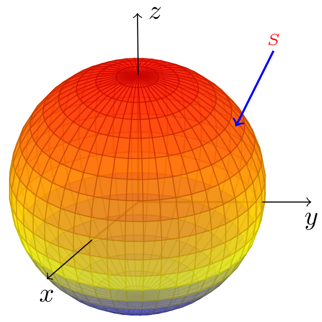
$$\iint\limits_{\delta K} V(x,y,z)\cdot d\sigma = \iiint\limits_{K}\operatorname{div} V(x,y,z)\,dxdydz.$$

Cette formule s'interprète comme suit : l'intégrale de la divergence de V dans le compact K est égale au flux de V à travers le bord δK.

Exemple 60

Reprenons l'exemple 55. Calculons l'intégrale

$$I=\iint\limits_{S} xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$$



en utilisant la formule d'Ostrogradski, où

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=4\right\}$$

est la sphère du rayon 2 centrée à l'origine.

On a $P(x,y,z)=x$, $Q(x,y,z)=y$ et $R(x,y,z)=z$, alors d'après la formule d'Ostrogradski

$$I=\iiint\limits_{K}\left(\tfrac{\partial P}{\partial x}+\tfrac{\partial Q}{\partial y}+\tfrac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{K}(1+1+1)\,dxdydz=\iiint\limits_{K}3dxdydz,$$

où $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$. Par le changement de variables en coordonnées sphériques $(x,y,z)=(r\cos u\sin v, r\sin u\sin v, r\cos v)$,

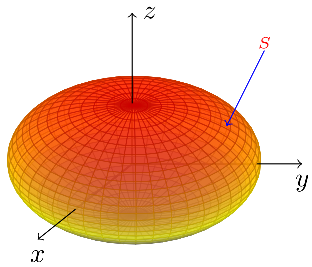
$$I=\iiint\limits_{K}dxdydz=\int_0^2 3r^2dr\int_0^{2\pi}du\int_0^{\pi}\sin v\,dv=32\pi. \quad \blacksquare$$

Volume d'un domaine dans $\mathbb{R}^3$

Soit K un compact simple dans $\mathbb{R}^3$ limité par une surface S orientée de façon que les vecteurs normaux soient extérieurs à K.
Le volume de K peut être calculée à l'aide d'une intégrale de surface

$$vol\,(K) = \iint\limits_{S} xdy \wedge dz = \iint\limits_{S} ydz \wedge dx = \iint\limits_{S} zdx \wedge dy.$$

Exemple 61 (Volume d'un ellipsoïde plein)



Calculons le volume de l'ellipsoïde plein $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$
Le bord $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$de $(\mathcal{E})$ peut être paramétré par

$$\begin{array}{llll} \phi : & D = [0, 2\pi[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto (x, y, z)\,(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)\,. \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} vol\,(\mathcal{E}) &= \iint\limits_{S} xdy \wedge dz = a \cos u \cos v \det \left(\begin{bmatrix} b \cos u \cos v & -b \sin u \sin v \\ 0 & c \cos v \end{bmatrix} \right) dudv \\ &= \iint\limits_{D} abc \cos^2 u \cos^3 v dudv = abc \int_0^{2\pi} \cos^2 u du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv = \tfrac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

Par conséquent, le volume de l'espace délimité par un ellipsoïde est $vol(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\pi abc.$ ■