Série d'exercices n° 1 : Limites et continuité

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de définition D_f et l'image $\operatorname{Im} f$ de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \left(\dfrac{xy}{z}, \sin(xyz)\right)$.

Exercice 2 :

Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ **2)** $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$ **3)** $f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$ **4)** $f(x,y) = \dfrac{2x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ **6)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \alpha > 0.$

Exercice 3 :

Étudier l'existence d'une limite au point indiqué pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$ en $(0,0,0)$ **2)** $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \dfrac{2x}{y} & \text{si } |x| < y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2 \end{cases}.$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions définies dans l'exercice 2.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha . |y|^{2\alpha}}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f soit continue en $(0,0)$.