Série d'exercices n° 3 : Théorèmes généraux du calcul différentiel

Exercice 1 :

On dit qu'une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est harmonique sur U si $f \in \mathcal{C}^2(U)$ et $\Delta f(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$.

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \mathrm{Log}\,(x^2+y^2)$

est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 3 :

À l'aide du changement $\xi = x + \lambda_1 y,\ \eta = x + \lambda_2 y$ transformer l'équation

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ b^2 - ac > 0,$$

en une équation de la forme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Exercice 4 :

Écrire le développement de Taylor à l'ordre 3 au voisinage du point a pour f.

1) $f(x,y) = \sin x \sin y, \qquad a = (0,0)\,,$

2) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4, \qquad a = (1,1,1)\,.$

Exercice 5 :

Étudier l'existence des extrema locaux des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, 2) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$, 3) $f(x,y) = (x-y)\,e^{xy}$,

4) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$, 5) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + 3z^3 - 4x - 4y - z$.

Exercice 6 :

Montrer que la relation $f(x,y)=0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point (a,b) et former le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de a de la fonction $\varphi : x \mapsto y(x)$.

1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1,\ (a,b)=(0,1)$ 2) $f(x,y)=e^{x+y}+y-1,\ (a,b)=(0,0)$.

Exercice 7 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=y^5+\left(x^2+1\right)y+1$.

Montrer que la relation $f(x,y)=0$ définit implicitement y en fonction de x sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $\varphi : x\mapsto y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-xz-x+y-2z+1$.

Montrer que la relation $f(x,y,z)=0$ définit implicitement z en fonction de (x,y) au voisinage du point $(0,0,1)$ et former le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ de la fonction $\varphi:(x,y)\mapsto z(x,y)$.

Exercice 9 :

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z)=x^4+z^4+y^2-2x^2-2z^2$.

1) Déterminer les extrema de f.

2) Déterminer les extrema de f sachant que x,y,z sont liées par la relation $x+y+z=0$.

Exercice 10 :

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z)=xyz$.

1) Montrer que la restriction de f à l'ensemble

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x^2+y^2+z^2=1,\quad x+y+z=0\right\}$$

admet un minimum et un maximum.

2) Déterminer les points où f atteint ses extrema.

Exercice 11 :

Déterminer le minimum de la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-z$ sur l'ensemble $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x^2+y^2+z^2\le 1\}$.