Série d'exercices n° 4 : Intégration des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 : Soit $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que $\int_a^b \left(\int_a^y f(x,y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b f(x,y)\, dy \right) dx$.

Indication. Calculer l'intégrale de f par deux méthodes différentes sur un ensemble convenable.

Exercice 2 : Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $[a,b] \times [c,d]$, et soient $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto v(x)$ deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit les fonctions F et G par $F(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy$ et $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\, dy$ et

1) Montrer la règle de Leibniz suivante : $F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy$.

Indication. Noter que $\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx = f(x,y) - f(a,y)$.

2) Montrer que $G'(x) = f(x, v(x))\, v'(x) - f(x, u(x))\, u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy$.

Indication. Considérer la fonction $H(u,v,x) = \int_u^v f(x,y)\, dy$ puis utiliser la règle de dérivation des fonctions composées.

Exercice 3 : Dessiner le domaine D et déterminer les bornes de l'intégrale $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ dans les cas suivants. 1) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$,

2) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 3 \le x \le 5,\ 1 \le 3x - 2y \le 4\}$, **3)** $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 \le y,\ y \le 4 - x^2\}$,

4) $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \le 1\}$, **5)** $D_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$,

6) D_6 est un parallélogramme de sommets $B_1 = (1,2)$, $B_2 = (2,4)$, $B_3 = (2,1)$ et $B_4 = (1,-1)$,

7) D_7 est un triangle dont les sommets sont $B_1 = (0,0)$, $B_2 = (1,2)$ et $B_3 = (2,1)$,

8) D_8 est le domaine délimité par les courbes d'équations $y = 0, y = x, y = \frac{1}{x}$ et $y = x + 1$.

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes.

1) $\iint_D (x^2 + y)\, dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \ge 0,\ 1 \le y \le 2,\ xy \le 1\}$,

2) $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 - 2y \le 0\}$,

3) $\iint_D (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\, dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \le 4,\ x + y + 2 \le 0\}$,

4) $\iint_D |x^2 - y^2|\, dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ |x| + |y| \le 1\}$,

5) $\iint_D (x + y)\, dxdy,\ D$ délimité par les courbes $2x + y = 2, 2x + y = 4, x - y = -2$ et $x - y = 1$.

Exercice 5 : Calculer le volume délimité par les surfaces indiquées.

1) $z = 0, y + z = 1$ et $y = x^2$, 2) $z = 0, y = 0, x = 1$ et $z = x^2$.

Exercice 6 : Changer l'ordre des bornes d'intégration dans ce qui suit.

1) $I_1 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2-4}^{5} f(x,y)\, dx$, **2)** $I_2 = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)\, dy$, 3) $I_3 = \int\limits_1^3 dy \int\limits_{y^2}^{y+9} f(x,y)\, dx$.

Exercice 7 :

Transformer les intégrales suivantes en coordonnées polaires et déterminer les bornes d'intégration.

1) $I_1 = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy$, **2)** $I_2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\, dy$,

3) $I_3 = \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2}^1 g\left(\frac{y}{x}\right) dx$, 4) $I_4 = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-x}^x f(x,y)\, dy$.

Exercice 8 : En utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$, transformer l'intégrale $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\, dy$.

Exercice 9 : Calculer les intégrales suivantes.

1) $\iint\limits_D \frac{1}{x^2+xy+y^2} dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ 4 \leq x^2+y^2 \leq 16\}$,

2) $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

Exercice 10 : Déterminer les bornes de l'intégrale $\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dxdydz$ dans les cas suivants.

1) $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$,

2) $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$,

3) $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2+y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$,

4) $D_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x+y+z \geq 1\}$.

Exercice 11 : Calculer l'intégrale $\iiint\limits_D (x^2+y^2)\, dxdydz$ où D est le solide de sommets $B_1 = (1,2,0)$, $B_2 = (1,-2,0)$, $B_3 = (0,0,3)$ et $B_4 = (0,0,-3)$.

Exercice 12 : Calculer le volume délimité par les surfaces indiquées.

1) $x = 0, y = 0, z = 0$ et $x+y+z = 1$, 2) $z = 0, x^2+y^2 = 1$ et $x+y+z = 3$,

3) $x^2+y^2 = 1$ et $x^2+z^2 = 1$.

Exercice 13 : Calculer les intégrales suivantes.

1) $\iiint\limits_D z^2 dxdydz,\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2 \leq 4z\}$,

2) $\iiint\limits_D (x+y+z)^2\, dxdydz,\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2 \leq 3\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2+y^2 \leq 2z\}$,

3) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz,\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2 \leq x\}$.