

Série d'exercices n° 6 : Équations différentielles

Exercice 1 : Montrer que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est solution de l'équation

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \text{ avec la condition initiale } y(0) = 0.$$

Discuter le résultat.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle $(E_2) : y' = t^2 + y^2$.

- 1) Montrer que (E_2) possède une solution maximale unique y qui vérifie $y(0) = 0$.
- 2) Montrer que y est une fonction impaire. 3) Étudier la monotonie et le signe de y .

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) Équations différentielles à variables séparées.

$$1) y' \sin t = y \cos t, \quad 2) t^2 y' + y^2 = -1, \quad 3) y = \text{Log } y', \quad 4) y^3 y' = e^t.$$

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre.

$$1) y' + y = \sin t, \quad 2) y' - ty = t^2, \quad 3) t^2 y' + y = 1, \quad 4) ty' - y = \text{Log } t.$$

c) Équations différentielles linéaires du premier ordre avec conditions initiales.

$$1) 2ty' + y = 1, \quad y(1) = 2, \quad 2) y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = 0.$$

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre suivantes.

$$1) y'' - 3y' + 2y = t^2 - 3t, \quad 2) y'' + y' - 2y = 9e^t - 2, \quad 3) y'' + 2y' + 4y = te^t, \quad y(0) = 1, y(1) = 0.$$

Exercice 5 : Déterminer une équation différentielle homogène, du second ordre à coefficients constants réels

$$ay'' + by' + cy = 0, a \neq 0 \text{ telle que}$$

- 1) Les fonctions e^t et e^{2t} soient solutions.
- 2) Les fonctions $(2 \cos t + 3 \sin t) e^{3t}$ et $(3 \cos t + 2 \sin t) e^{3t}$ soient solutions.
- 3) La fonction te^{3t} soit solution.
- 4) La fonction $e^t \cos t$ soit solution.

Exercice 6 : Résoudre les systèmes des équations différentielles linéaires suivants.

$$1) \begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 5x - 4y \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + 3y \end{cases}.$$