

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE⁽¹⁾

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

DÉPARTEMENT D'ANALYSE



Notes de Cours du module
Fonctions de plusieurs variables

Par

LAADJ Toufik⁽²⁾

Pour

Troisième année Licence
Algèbre et Cryptographie

Septembre 2014

⁽¹⁾USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.

⁽²⁾Page Web : <http://perso.usthb.dz/~tlaadj/>

Table des matières

Table des matières	iii
Description du Cours	iv
0 Rappel sur les propriétés topologique de $\mathbb{R}^n$	1
0.1 Notion de distance dans $\mathbb{R}^n$	2
0.2 Normes dans $\mathbb{R}^n$	2
0.2.1 Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$	3
0.2.2 Normes équivalentes	4
0.3 Propriétés topologique de $\mathbb{R}^n$	4
0.3.1 Suites de $\mathbb{R}^n$	4
0.3.2 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$	6
0.3.3 Quelques propriétés élémentaires	9
1 Fonctions continues	11
1.1 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables	11
1.1.1 Définitions	11
1.1.2 Représentation graphique	13
1.2 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$	14
1.2.1 Changement de variables	15
1.3 Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$	16
1.3.1 Fonctions continues et ensembles compacts	18
2 Fonctions différentiables	19

2.1	Introduction	19
2.2	Définitions et propriétés élémentaires	20
2.3	Dérivées partielles, gradient et matrice jacobienne	23
2.3.1	Interprétation géométrique de la différentielle	29
2.4	Composition des fonctions différentiables	30
2.5	Dérivée suivant un vecteur - Dérivée directionnelle	32
2.5.1	Interprétation géométrique en dimension 2	34
3	Théorèmes généraux du calcul différentiel	36
3.1	Dérivées partielles d'ordre supérieur	36
3.1.1	Théorème de Schwarz	38
3.2	Théorème des accroissements finis	39
3.3	Formule de Taylor	41
3.3.1	Points critiques et extrema libres	43
3.4	Théorème des fonctions implicites	46
3.4.1	Extrema liés	48
4	Intégration des fonctions de plusieurs variables	50
4.1	Introduction et définitions générales	51
4.1.1	Notion de pavé	51
4.1.2	Ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^n$	52
4.1.3	Sommes de Darboux	52
4.1.4	Fonctions intégrables sur une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$	53
4.2	Intégrales doubles	56
4.2.1	Interprétation géométrique d'une intégrale double	58
4.2.2	Changement de variables dans les intégrales doubles	59
4.3	Intégrales triples	60
4.3.1	Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$	61
4.3.2	Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$	63
5	Formes différentielles, intégrales curviligne et de surface	66
5.1	Formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$	67
5.1.1	Formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$	67
5.1.2	Formes différentielles	69

5.2	Intégration de formes différentielles	74
5.2.1	Courbes et surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^n$	75
5.2.2	Intégrale curviligne	79
5.2.3	Intégrale de surface	81
5.3	Formules de Stokes, de Green-Riemann et d'Ostrogradski	84
5.3.1	Formule de Green-Riemann	85
5.3.2	Formule d'Ostrogradski	89

Description du Cours

Objectif du Cours

L'objectif du module 'Fonctions de plusieurs variables' est de généraliser les concepts et les résultats fondamentaux des fonctions numériques d'une variable réelle, tels de dérivation et d'intégration, aux fonctions de plusieurs variables.

Contenu du Cours

- Fonctions de plusieurs variables
 - Continuité, différentiabilité, gradient, formule de Taylor.
 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.
 - Extrema, extrema liés.
- Intégration des fonctions de plusieurs variables
 - Intégrales doubles et triples.
 - Intégrales curvilignes, intégrales de surfaces.
 - Formules de Stokes, d'Ostrogradski et de Green-Riemann.
- Équations différentielles $y' = f(x, y)$.
 - Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy.

(La partie des équations différentielles n'est pas encore disponible dans ce polycopié de cours).

Résultats d'apprentissage

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une bonne compréhension de l'analyse des fonctions de plusieurs variables et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour résoudre les exercices dans une variété de contextes.

En particulier, l'étudiant doit être capable de :

- Calculer les limites des fonctions de plusieurs variables.
- Étudier leurs continuités.
- Étudier leurs différentiabilité.
- Calculer les dérivées partielles premières des fonctions composées.
- Comprendre ce qu'une dérivée suivant un vecteur est.
- Calculer les dérivées partielles d'ordre supérieur.
- Citer et appliquer le théorème des accroissements finis.
- Calculer le développement de Taylor à l'ordre supérieur à deux.
- Trouver les points critiques et extrema libres.
- Comprendre et appliquer le théorème des fonctions implicites.
- Appliquer le théorème de Lagrange pour calculer les extrema liés.
- Effectuer l'intégration double et triple.
- Calculer les intégrales doubles en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.
- Calculer les intégrales triple en utilisant les coordonnées cylindriques et sphériques.
- Comprendre ce qu'une forme différentielle est.
- Effectuer l'intégration curviligne et de surface.
- Citer et appliquer les formules de Stokes, de Green-Riemann et d'Ostrogradski.