
Chapitre 0

Les nombres complexes

Sommaire

0.1	L'ensemble des nombres complexes	1
0.1.1	Opérations sur les nombres complexes	2
0.1.2	Valeur absolue (ou module)	3
0.2	Représentation graphique des nombres complexes	3
0.2.1	Courbes dans le plan complexe	4
0.3	Forme polaire des nombres complexes	4
0.3.1	Formule de De Moivre	5
0.3.2	Racines d'un nombre complexe	5

0.1 L'ensemble des nombres complexes

Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.

Réponse : Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

Définition 1

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique :

$$z = x + iy \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels,}$$

et i est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.

- Le nombre x est appelée la partie réelle de z , on note $x = \operatorname{Re}(z)$.
- Le nombre y est appelée la partie imaginaire de z , on note $y = \operatorname{Im}(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque 2

- a) Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z').$$

- b) Si $y = 0$ on dit que z est réel, si $x = 0$ on dit que z est un **imaginaire pur**.
 c) Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z .

0.1.1 Opérations sur les nombres complexes

- Addition : $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$.
- Soustraction : $(x + yi) - (u + vi) = (x - u) + (y - v)i$.
- Multiplication : $(x + yi)(u + vi) = xu + xvi + yui + yvi^2 = xu - yv + (xv + yu)i$.
- Division : $\frac{x + yi}{u + vi} = \frac{x + yi}{u + vi} \cdot \frac{u - vi}{u - vi} = \frac{xu - xvi + yui - yvi^2}{u^2 + v^2} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}i$.

Remarque 3

Soient z et w deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

$$(1) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad (2) \overline{zw} = \bar{z} \bar{w} \quad (3) \bar{\bar{z}} = z \quad (4) z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad (5) z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)i.$$

0.1.2 Valeur absolue (ou module)

Définition 4

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple 1

$$|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \blacksquare$$

Si z et w sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

- (1) $|zw| = |z| |w|$ (2) $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$ (3) $|\bar{z}| = |z|$ (4) $z \bar{z} = |z|^2$.
 (5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire) (6) $|z - w| \geq |z| - |w|$.

Remarque 5

On a les propriétés suivantes :

- (1) $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x^2 = |x|^2$ si $x \in \mathbb{R}$ (2) $z^2 \neq |z|^2$ si $\text{Im}(z) \neq 0$.
 (3) $|z| = 0 \iff z = 0$ (4) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Remarque 6

Si z et w sont deux nombres complexes tels que $w \neq 0$, alors on a :

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z \bar{w}}{|w|^2}.$$

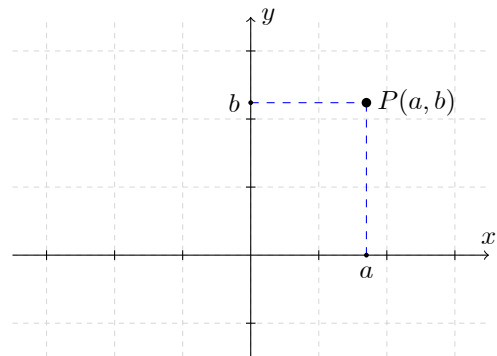
Exemple 2

$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{-4}{5} + \frac{7}{5}i. \blacksquare$$

0.2 Représentation graphique des nombres complexes

Un nombre complexe $a + ib$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des xy appelé **plan complexe**.

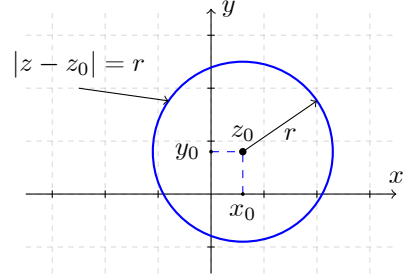
À chaque nombre complexe $z = a + ib$ correspond un point $P(a, b)$ du plan.



0.2.1 Courbes dans le plan complexe

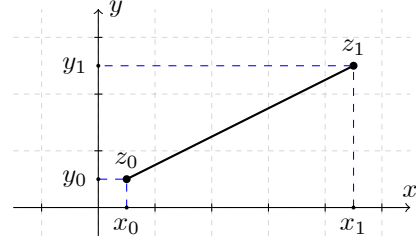
Cercle

Le cercle de rayon r et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ est défini par l'équation $|z - z_0| = r$.



Segments

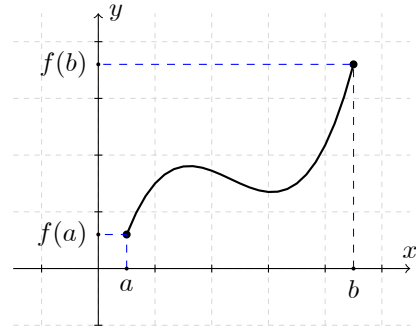
Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points $\{z \in \mathbb{C} \mid z = (1 - t)z_0 + tz_1, t \in [0, 1]\}$.



Courbes

En général, une courbe $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ où f est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = x + if(x) = (x, f(x)), x \in [a, b]\}.$$



0.3 Forme polaire des nombres complexes

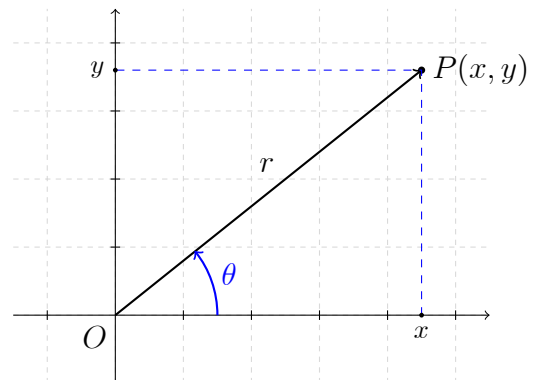
Si $P(x, y)$ désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe $z = x + iy$, nous voyons que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ est le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$, et θ est appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$, noté $\arg z$, est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le demi-axe positif Ox .

On en tire

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$



qui est appelée la **forme polaire** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z .
Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle θ est appelé l'**argument principal**, noté par $\text{Arg } \theta$. On a

$$\arg z = \text{Arg } \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

0.3.1 Formule de De Moivre

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \}, \quad (0.1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2) \}.$$

Une généralisation de (0.1) conduit à

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \{ \cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \},$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^n = r^n \{ \cos (n\theta) + i \sin (n\theta) \},$$

qui est appelée formule de De Moivre.

0.3.2 Racines d'un nombre complexe

Un nombre z est appelé racine n -ième d'un nombre complexe $a + ib$ si $z^n = a + ib$, et nous écrivons $z = (a + ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a + ib}$. D'après la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a + ib)^{\frac{1}{n}} = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

D'où il résulte qu'il y a n racines n -ièmes différentes de $a + ib$ pourvu que $a + ib \neq 0$.

Exemple 3

Calculer les racines quatrièmes de 1.

On a $\sqrt[4]{1} = \{ \cos (0 + 2k\pi) + i \sin (0 + 2k\pi) \}^{\frac{1}{4}} = \cos \left(\frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$

Pour $k = 0$, $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$; $k = 1$, $z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$;

$k = 2$, $z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$; $k = 3$, $z_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$. ■

Exemple 4

Calculer $\sqrt[3]{1-i}$.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-i} &= (1-i)^{\frac{1}{3}} = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right) \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos \left(\frac{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \right\} \\ &= \sqrt[6]{2} \left\{ \cos \left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $z_0 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos \left(\frac{-\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{12} \right) \right\}$; $k = 1$, $z_1 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right\}$;
 $k = 2$, $z_2 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right\}$. ■