
Chapitre 1

Fonctions élémentaires

Sommaire

1.1	Fonctions complexes	8
1.1.1	Fonctions uniformes et multiformes	8
1.1.2	Fonctions inverses	9
1.1.3	Transformations	9
1.1.4	Limites	9
1.1.5	Continuité	10
1.2	Fonctions élémentaires	11
1.2.1	Les fonctions polynômiales	11
1.2.2	Les fractions rationnelles	11
1.2.3	Les fonctions exponentielles	11
1.2.4	Fonctions trigonométriques	12
1.2.5	Les fonctions hyperboliques	12
1.2.6	Fonctions logarithmiques	12
1.2.7	La fonction z^α	14
1.2.8	Fonctions trigonométriques inverses	14
1.2.9	Fonctions hyperboliques inverses	14

1.1 Fonctions complexes

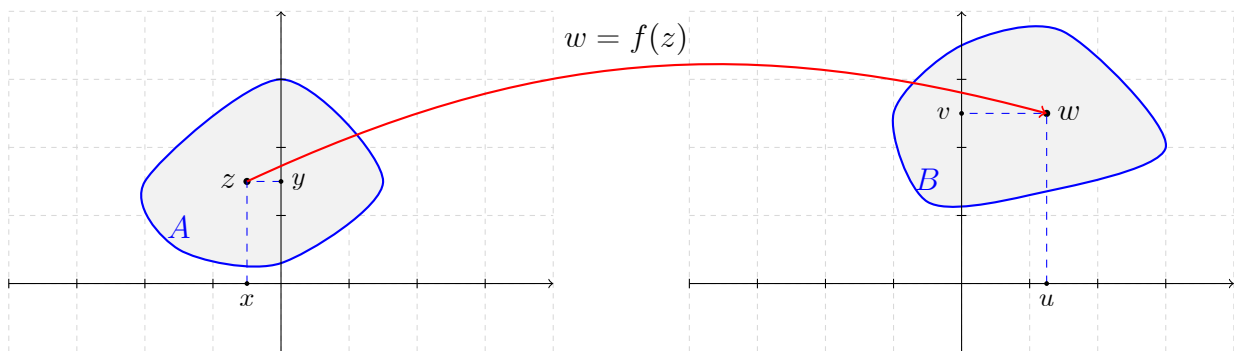
Définition 7

Soient A et B deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou

$$f : A \longrightarrow B$$

$$z \longmapsto w = f(z).$$

La fonction $w = f(z)$ définit une correspondance entre deux plans complexes.



Exemple 5

$z \mapsto w = f(z) = z^2$. Par exemple, la valeur de f en $z = 2i$ est $f(2i) = (2i)^2 = -4$. ■

1.1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 8

- Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z on dira que w est une fonction **uniforme** de z ou que $f(z)$ est uniforme.
- Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z , on dira que w est une fonction **multiforme** de z .

Remarque 9

- Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une **branche** de la fonction.
- On choisit habituellement un élément comme **branche principale**, ainsi est appelée **détermination principale**.

Exemple 6

Si $w = f(z) = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w . Donc $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z . ■

Exemple 7

Si l'on considère la fonction $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w . Donc $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z . ■

1.1.2 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w , ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f .

Exemple 8

La fonction $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $f(z) = z^2$. ■

1.1.3 Transformations**Définition 10**

Si $z = x + iy$, on peut écrire $f(z)$ comme $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Les fonctions u et v sont appelées, respectivement, **partie réelle** et **partie imaginaire** de f . On note

$$u = \operatorname{Re}(f) \quad \text{et} \quad v = \operatorname{Im}(f).$$

Exemple 9

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3yx^2 - y^3)i.$$

Les parties réelle et imaginaire sont $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ et $v(x, y) = 3yx^2 - y^3$. ■

1.1.4 Limites**Définition 11**

Soit f une fonction complexe à une variable complexe, on dit que f admet une limite l en $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Exemple 10

Soit $f(z) = z^2$. Par exemple $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = f(i) = i^2 = -1$. ■

Proposition 12

Posons $l = a + ib$ et $f = u + iv$ où a, b, u et v sont des réels, alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \left\{ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b \right\}.$$

Remarque 13

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Si la fonction f est multiforme la limite de f quand $z \rightarrow z_0$ peut dépendre de la branche choisie.

1.1.5 Continuité**Définition 14**

Soit f une fonction complexe uniforme. La fonction f est dite continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Une fonction f est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.

Exemple 11

Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i. \end{cases}$$

Quand z tend vers i , $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$, i.e. $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = i^2 = -1$. Mais $f(i) = 0$.

Donc $\lim_{z \rightarrow i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction n'est pas continue en $z = i$. ■

Remarque 15

La fonction $f = u + iv$ est continue dans un domaine si et seulement si la partie réelle u et la partie imaginaire v sont continues.

1.2 Fonctions élémentaires

1.2.1 Les fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales sont définies par

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

où $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le **degré** du polynôme $P(z)$.

1.2.2 Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes. Le cas particulier $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, où $ad-bc \neq 0$ est appelé transformation **homographique**.

1.2.3 Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens, $e \simeq 2,718$. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a}.$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles. Ainsi par exemple $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.

1.2.4 Fonctions trigonométriques

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou **circulaires**, $\sin z$, $\cos z$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante.

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} & \csc z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} & \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.\end{aligned}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,

1.2.5 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{coth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.\end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2, \dots$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(iz) &= i \operatorname{sh} z & \cos(iz) &= \operatorname{ch} z & \operatorname{tg}(iz) &= i \operatorname{th} z \\ \operatorname{sh}(iz) &= i \sin z & \operatorname{ch}(iz) &= \cos z & \operatorname{th}(iz) &= i \operatorname{tg} z.\end{aligned}$$

1.2.6 Fonctions logarithmiques

La fonction $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z .

$$w = \operatorname{Log} z \Leftrightarrow z = e^w.$$

Question : Pour un nombre complexe z donné, le nombre w qui vérifie $z = e^w$ est-il unique?

Réponse : Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$. On a

$$\begin{aligned} z = e^w &\Leftrightarrow x + iy = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v) \\ &\Leftrightarrow \{|z| = e^u \text{ et } v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

D'où w n'est pas unique car

$$w = \operatorname{Log} z = u + iv = \ln |z| + i (\operatorname{Arg} z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 16

La fonction $\operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z &= \ln |z| + i \arg z \\ &= \ln |z| + i (\operatorname{Arg} z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \text{ où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi. \end{aligned}$$

Remarque 17

La détermination **principale** ou valeur principale de $\operatorname{Log} z$ est souvent définie par

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \text{ où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

Exemple 12

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln |-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Pour la détermination principale, $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$. ■

Les propriétés suivantes sont vérifiées (modulo $[2\pi i]$) :

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}(z^n) = n \operatorname{Log} z.$$

Exemple 13

Utilisons la détermination principale du logarithme :

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln |1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i,$$

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln |-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = \pi i,$$

$$\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(-1-i) = \ln |-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i) = \ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

On remarque que $\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(1+i) + \operatorname{Log}(-1) - 2\pi i$. ■

1.2.7 La fonction z^α

La fonction z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$, est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données, de z , on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log} f(z)}.$$

En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple 14

$$i^{-i} = e^{-i \operatorname{Log} i} = e^{-i(\ln|i| + i \arg(i))} = e^{-i^2(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

La détermination principale est $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$. ■

Remarque 18

On a $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ dans le cas général si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exemple 15

On a $((-i)^2)^i = (-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(\ln|-1| + i \arg(-1))} = e^{i^2(\pi + 2k\pi)} = e^{-\pi - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(-i)^{2i} = e^{2i \operatorname{Log}(-i)} = e^{2i(\ln|-i| + i \arg(-i))} = e^{2i^2(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{\pi - 4k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

1.2.8 Fonctions trigonométriques inverses

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} (iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\operatorname{Arcos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

$$\operatorname{Arcotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{z + i}{z - i} \right).$$

1.2.9 Fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{Argsh} z = \operatorname{Log} (z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\operatorname{Argch} z = \operatorname{Log} (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)$$

$$\operatorname{Argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right).$$