

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE⁽¹⁾

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

DÉPARTEMENT D'ANALYSE



Notes de Cours du module
Analyse Complexe (Math 4)

Par

LAADJ Toufik⁽²⁾

Pour

Deuxième année Licence
Domaine : Sciences et Technologies

Février 2014

⁽¹⁾USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.

⁽²⁾Page Web : <http://perso.usthb.dz/~tlaadj/>

Table des matières

Table des matières	iii
Description du Cours	iv
0 Les nombres complexes	1
0.1 L'ensemble des nombres complexes	1
0.1.1 Opérations sur les nombres complexes	2
0.1.2 Valeur absolue (ou module)	3
0.2 Représentation graphique des nombres complexes	3
0.2.1 Courbes dans le plan complexe	4
0.3 Forme polaire des nombres complexes	4
0.3.1 Formule de De Moivre	5
0.3.2 Racines d'un nombre complexe	5
1 Fonctions élémentaires	7
1.1 Fonctions complexes	8
1.1.1 Fonctions uniformes et multiformes	8
1.1.2 Fonctions inverses	9
1.1.3 Transformations	9
1.1.4 Limites	9
1.1.5 Continuité	10
1.2 Fonctions élémentaires	11
1.2.1 Les fonctions polynômiales	11
1.2.2 Les fractions rationnelles	11

1.2.3	Les fonctions exponentielles	11
1.2.4	Fonctions trigonométriques	12
1.2.5	Les fonctions hyperboliques	12
1.2.6	Fonctions logarithmiques	12
1.2.7	La fonction z^α	14
1.2.8	Fonctions trigonométriques inverses	14
1.2.9	Fonctions hyperboliques inverses	14
2	Dérivation dans le domaine complexe	15
2.1	Domaines dans le plan complexe	15
2.2	Fonctions holomorphes	17
2.2.1	Dérivées	17
2.2.2	Conditions de Cauchy-Riemann	18
2.2.3	Fonctions harmoniques	19
2.2.4	Règles de dérivation	21
2.2.5	Règle de l'Hôpital	21
2.2.6	Points singuliers	22
3	Intégration dans le domaine complexe	23
3.1	Chemins et courbes dans le plan complexe	23
3.2	Intégration le long d'une courbe	25
3.2.1	Propriétés	27
3.3	Théorèmes de Cauchy	29
3.3.1	Domaines simplement ou multiplement connexes	29
3.3.2	Théorème de Cauchy	30
3.3.3	Primitives et intégration	31
3.3.4	Formule intégrale de Cauchy	33
4	Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent	35
4.1	Séries de fonctions	35
4.1.1	Convergence absolue	36
4.2	Séries entières	36
4.2.1	Rayon de convergence	37
4.3	Séries de Taylor	38

4.3.1	Quelques séries particulières	38
4.4	Séries de Laurent	39
4.4.1	Classification des singularités	41
5	Théorème des résidus	43
5.1	Résidus	43
5.1.1	Calcul des résidus	44
5.2	Le théorème des résidus	46
5.3	Application du théorème des résidus	47
5.3.1	Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales	47
5.3.2	Application aux transformées de Fourier	48
5.3.3	Calcul d'intégrales définies diverses	50
	Références	57

Description du Cours

Objectif du Cours

L'objectif du module Analyse Complexe (Math 4) est de maîtriser les concepts et les résultats fondamentaux de la théorie des fonctions complexes de variables complexes de manière à pouvoir les utiliser dans d'autres cours.

Ces notes de cours donnent les principales définitions et les résultats fondamentaux, illustrés par des exemples.

Contenu du Cours

- Les nombres complexes
- Fonctions complexes
- Dérivation complexe, équations de Cauchy-Riemann
- Intégration complexe, Théorème de Cauchy
- Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent
- Théorème des résidus

Résultats d'apprentissage

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une bonne compréhension de la théorie des fonctions complexes à variable complexe et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour résoudre les exercices dans une variété de contextes.

En particulier, l'étudiant doit être capable de :

- Comprendre ce qu'une dérivation complexe est.
- Citer, tirer et appliquer les équations de Cauchy-Riemann.
- Effectuer l'intégration curviligne de fonctions complexes.
- Comprendre et appliquer le théorème de Cauchy et la formule intégrale de Cauchy
- Étudier les propriétés de convergence d'une série de puissance complexe.
- Appliquer les théorèmes de Taylor et de Laurent pour obtenir des développements en série de puissance.
- Identifier et classer les singularités de fonctions complexes et trouver des résidus.
- Tirer et appliquer le théorème des résidus pour calculer des intégrales réelles en utilisant des résidus.