USTHB 2014-2015 Semestre 2 | Math 4 : Analyse complexe

Faculté de Mathématiques | $2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G

Examen final - 31 mai 2015. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom et Prénom :.. ....

Matricule :.. **Groupe :**..

/20

Exercice 1 (5 points) :

a) Déterminer $u(x,y)$ et $v(x,y)$ telles que $z^2+e^{2z}=u(x,y)+iv(x,y)$.

b) Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions u et v.

c) Montrer que les fonctions u et v sont harmoniques.

Réponse.

a) On a

$$\begin{aligned} z^2+e^{2z} &= (x+iy)^2+e^{2x+i2y}=x^2-y^2+2xyi+e^{2x}(\cos(2y)+i\sin(2y)) \\ &= x^2-y^2+e^{2x}\cos(2y)+(2xy+e^{2x}\sin(2y))\,i. \end{aligned}$$

Alors

$$u(x,y)=x^2-y^2+e^{2x}\cos(2y)$$

et

$$v(x,y)=2xy+e^{2x}\sin(2y).$$

b) On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2e^{2x}\cos(2y), \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x+2e^{2x}\cos(2y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-2e^{2x}\sin(2y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y+2e^{2x}\sin(2y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Nous constatons que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites sur $\mathbb{C}$.

c) On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2e^{2x}\cos(2y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2+4e^{2x}\cos(2y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-2e^{2x}\sin(2y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2-4e^{2x}\cos(2y),$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+2e^{2x}\sin(2y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=4e^{2x}\sin(2y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+2e^{2x}\cos(2y) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-4e^{2x}\cos(2y).$$

On obtient alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, ce qui montre que u et v sont harmoniques.

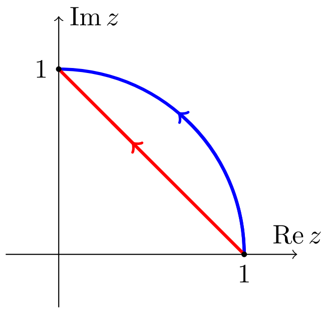
Exercice 2 (5 points) :

a) Calculer $\int_C (\overline{z}^2 + 3z^2)\, dz$ le long

1. du cercle $|z| = 1$ de $(1, 0)$ à $(0, 1)$ dans le sens direct,

2. du segment de droite joignant $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.



Réponse.

a)

1. L'arc de $(1, 0)$ à $(0, 1)$ du cercle $|z| = 1$ peut être paramétré par $z = e^{it},\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de l'arc, correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(e^{-it}\right)^2 + 3\left(e^{it}\right)^2\right) d\left(e^{it}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-2it} + 3e^{2it}\right) ie^{it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ie^{-it} + 3ie^{3it}\right) dt \\
&= \left[-e^{-it} + e^{3it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{3\pi}{2}} - \left(-e^{-0} + e^0\right) \\
&= i - i - (-1 + 1) = 0.
\end{aligned}$$

2. Le segment d'extrémités $z_0 = 1 \equiv (1, 0)$ et $z_1 = i \equiv (0, 1)$ noté $[z_0, z_1]$ peut être paramétré par

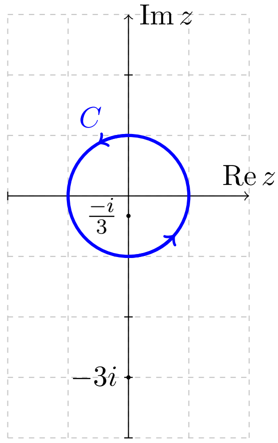
$$z(t) = (1 - t) z_0 + t z_1 = (1 - t) + ti,\ 0 \leq t \leq 1.$$

Sur le segment $[z_0, z_1]$, on a alors $dz = z'(t)\, dt = (i - 1)\, dt$ et l'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned}
\int_{[z_0, z_1]} \left(\overline{z}^2 + 3z^2\right) dz &= \int_0^1 \left((1 - t - ti)^2 + 3(1 - t + ti)^2\right)(i - 1)\, dt \\
&= \left[\tfrac{i-1}{3(-1-i)}(1 - t - ti)^3 + (1 - t + ti)^3\right]_0^1 \\
&= \tfrac{(i-1)(-i)^3}{3(-1-i)} + i^3 - \tfrac{i-1}{3(-1-i)} - 1 = \tfrac{-1-i}{3(-1-i)} - i - \tfrac{i-1}{3(-1-i)} - 1 \\
&= \tfrac{1}{3} - i + \tfrac{i}{3} - 1 = -\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}i.
\end{aligned}$$

b) La fonction à intégrer $f(z) = \overline{z}^2 + 3z^2$ n'est pas holomorphe car $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 2\overline{z} \neq 0$, donc l'intégrale dépend du chemin suivi et pas seulement du point d'arrivé et du point de départ.

Exercice 3 (5 points) :



a) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\int\limits_C \frac{1}{z+3i}dz$ et $\int\limits_C \frac{1}{z+\frac{i}{3}}dz$ où C désigne le cercle $|z|=1$ dans le sens direct.

b) En déduire $\int\limits_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$. **Indication.** Noter que $\frac{8i}{3z^2+10iz-3} = \frac{1}{z+\frac{i}{3}} - \frac{1}{z+3i}$.

c) En utilisant la paramétrisation $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ du cercle C, vérifier que $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t}dt = \int\limits_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$, puis en déduire $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t}dt$.

Réponse.

a) Seul $-\frac{i}{3}$ est à l'intérieur de C, car

$$\left|-\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1 \text{ et } |-3i| = 3 > 1.$$

Alors, l'application de la formule de Cauchy

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{si } a \in \operatorname{Int} C \\ 0 & \text{si } a \notin \operatorname{Int} C \end{cases}$$

pour $a = -\frac{i}{3}$ puis $a = -3i$ avec $f(z) = 1$ donne

$$\int\limits_C \frac{1}{z+3i}dz = 0 \text{ et } \int\limits_C \frac{1}{z+\frac{i}{3}} = 2\pi i.$$

b) On a $\frac{2}{3z^2+10iz-3} = \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z+\frac{i}{3}} - \frac{1}{z+3i}\right)$. Alors

$$\int\limits_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz = \frac{1}{4i}\left(\int\limits_C \frac{1}{z+\frac{i}{3}}dz - \int\limits_C \frac{1}{z+3i}dz\right) = \frac{1}{4i}(2\pi i - 0) = \frac{\pi}{2}.$$

c) On pose $z = e^{it}$. D'où $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{it}dz = izdt$ et donc

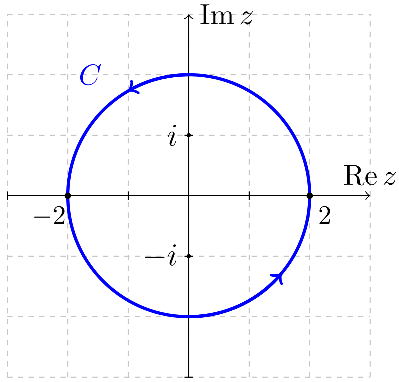
$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t}dt = \int\limits_C \frac{1}{5+3\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{dz}{iz} = \int\limits_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz.$$

On a alors

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t}dt = \int\limits_C \frac{2}{3z^2+10iz-3}dz = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4 (5 points) : On considère la fonction $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$.

Soit C le cercle $|z| = 2$ orienté dans le sens direct.



a) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\int\limits_C \frac{2z}{z^2+1}dz$. *Indication* : $\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$.

b) En utilisant la paramétrisation $z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ du cercle C, recalculer $\int\limits_C \frac{2z}{z^2+1}dz$.

c) Trouver les résidus de $f(z)$ en **tous les pôles**.

d) Comparer le résultat obtenu en **(a)** et **(b)** avec la somme des résidus de la question **(c)**.

Réponse.

a) Les deux points singuliers i et $-i$ sont à l'intérieur de C, car $|i| = 1 < 2$ et $|-i| = 1 < 2$.

Alors, l'application de la formule de Cauchy

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{si } a \in \operatorname{Int} C \\ 0 & \text{si } a \notin \operatorname{Int} C \end{cases}$$

pour $a = i$ puis $a = -i$ avec $f(z) = 1$ donne $\int\limits_C \frac{1}{z-i}dz = 2\pi i$ et $\int\limits_C \frac{1}{z+i} = 2\pi i$.

Par conséquent $\int\limits_C \frac{2z}{z^2+1}dz = \int\limits_C \frac{1}{z-i}dz + \int\limits_C \frac{1}{z+i} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$.

b) Le cercle $|z| = 2$ est paramétré par $z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors $dz = 2ie^{it}dt$ et donc

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \tfrac{2z}{z^2+1}dz &= \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{4e^{it}}{4e^{2it}+1} 2ie^{it}dt = \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{8ie^{2it}}{4e^{2it}+1}dt \\
&= \left[\operatorname{Log}\left(4e^{2it}+1\right)\right]_0^{2\pi} = \operatorname{Log}\left(4e^{4i\pi}+1\right) - \operatorname{Log}\left(4e^{0}+1\right) \\
&= \left|4e^{4i\pi}+1\right| + i\arg\left(4e^{4i\pi}+1\right) - \left|4e^{0}+1\right| - i\arg\left(4e^{0}+1\right) \\
&= 5 + 4i\pi - 5 - 0 = 4i\pi.
\end{aligned}$$

c) La fonction $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ possède deux pôles simples en $z = -i$ et $z = i$.

Le résidu en $z = -i$ est $\operatorname{Res}(f, -i) = \lim\limits_{z \to -i} (z+i) \frac{2z}{z^2+1} = \lim\limits_{z \to -i} (z+i) \frac{2z}{(z+i)(z-i)} = \lim\limits_{z \to -i} \frac{2z}{z-i} = \frac{-2i}{-2i} = 1$.

Le résidu en $z = i$ est $\operatorname{Res}(f, i) = \lim\limits_{z \to i} (z-i) \frac{2z}{z^2+1} = \lim\limits_{z \to i} (z-i) \frac{2z}{(z+i)(z-i)} = \lim\limits_{z \to i} \frac{2z}{z+i} = \frac{2i}{2i} = 1$.

d) Le résultat obtenu dans **(a)** et **(b)** est $\int\limits_C \frac{2z}{z^2+1}dz = 4\pi i$.

Nous constatons que $4\pi i = 2\pi i\,(1+1) = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f, -i) + \operatorname{Res}(f, i)\right)$.