

Série d'exercices N° 1 : Fonctions élémentaires

**Exercice 1** : Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

**a)**  $f(z) = e^{-z}$ , **b)**  $f(z) = \sin z$ , **c)**  $f(z) = \text{Ch } z$ , **d)**  $f(z) = 2^{z^2}$ , **e)**  $f(z) = z^{2-i}$ .

**Solution.** **a)**  $f(z) = e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x} e^{-iy} = e^{-x} (\cos y - i \sin y) = e^{-x} \cos y - i e^{-x} \sin y$ ,

$$\begin{aligned} \text{b) } f(z) = \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y} - e^y) \cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y} + e^y) \sin x}{2i} \\ &= i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x = \text{Ch } y \sin x + i \text{Sh } y \cos x. \end{aligned}$$

Autre méthode :  $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$ .

Puisque  $\cos(iy) = \text{Ch } y$  et  $\sin(iy) = i \text{Sh } y$ , on trouve  $\sin z = \sin x \text{Ch } y + i \cos x \text{Sh } y$ .

**c)**  $f(z) = \text{Ch } z = \text{Ch}(x + iy) = \text{Ch } x \text{Ch}(iy) + \text{Sh } x \text{Sh}(iy)$ .

En notant que  $\text{Ch}(iy) = \cos y$  et  $\text{Sh}(iy) = i \sin y$ , on obtient

$$f(z) = \text{Ch } x \cos y + i \text{Sh } x \sin y.$$

**d)**  $f(z) = 2^{z^2} = e^{z^2 \text{Log}(2)} = e^{(x+iy)^2 (\ln(2) + 2ik\pi)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &= e^{(x^2 - y^2 + 2ixy)(\ln(2) + 2ik\pi)} = e^{(x^2 - y^2) \ln(2) - 4k\pi xy + 2i\{(x^2 - y^2)k\pi + xy \ln 2\}} \\ &= e^{(x^2 - y^2) \ln(2) - 4k\pi xy} \{ \cos [2(x^2 - y^2)k\pi + 2xy \ln 2] + i \sin [2(x^2 - y^2)k\pi + 2xy \ln 2] \}. \end{aligned}$$

Pour la détermination principale ( $k = 0$ ),  $f(z) = 2^{(x^2 - y^2)} \{ \cos(2xy \ln 2) + i \sin(2xy \ln 2) \}$ .

**e)**  $f(z) = z^{2-i} = e^{(2-i)\text{Log}(z)} = e^{(2-i)(\ln(|z|) + i \arg(z))} = e^{2 \ln(|z|) + \arg(z) + i(2 \arg(z) - \ln(|z|))}$

$$= e^{2 \ln(|z|) + \arg(z)} \{ \cos(2 \arg(z) - \ln |z|) + i \sin(2 \arg(z) - \ln |z|) \}.$$

Puisque  $\arg(z)$  peut s'écrire sous forme  $\text{arctg}(\frac{y}{x})$  et  $\ln(|z|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \text{Re}(f(z)) &= (x^2 + y^2) e^{\text{arctg}(\frac{y}{x})} \cos \left( 2 \text{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) \text{ et} \\ \text{Im}(f(z)) &= (x^2 + y^2) e^{\text{arctg}(\frac{y}{x})} \sin \left( 2 \text{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) \end{aligned}$$

Noter que  $\text{arctg}(\frac{y}{x}) = \text{Arctg}(\frac{y}{x}) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , et donc  $f$  est une fonction multiforme.

**Exercice 2** : Démontrer les relations suivantes :

**a)**  $|\sin z| = \sqrt{\text{Ch}^2 y - \cos^2 x}$ , **b)**  $|\cos z| = \sqrt{\text{Ch}^2 y - \sin^2 x}$ ,  
**c)**  $|\text{Sh } z| = \sqrt{\text{Ch}^2 x - \cos^2 y}$ , **d)**  $|\text{Ch } z| = \sqrt{\text{Ch}^2 x - \sin^2 y}$ .

**Solution.** Nous pouvons calculer le module d'un nombre complexe  $w$ , soit par définition en identifiant ses parties réelles et imaginaires ou par la propriété  $|w|^2 = w\bar{w}$ .

Nous allons utiliser la propriété  $|w|^2 = w\bar{w}$  ici.

• **a)**  $|\sin z|^2 = \sin z \overline{\sin z} = \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \left( \frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} \right) = \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{4}$ .

Puisque  $z - \bar{z} = 2iy$  et  $z + \bar{z} = 2x$ , on a

$$|\sin z|^2 = \frac{e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)).$$

En utilisant les transformations  $\operatorname{Ch}(2y) = 2 \operatorname{Ch}^2 y - 1$  et  $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$ , on trouve le résultat demandé  $|\sin z|^2 = \frac{1}{2} (2 \operatorname{Ch}^2 y - 1 - (2 \cos^2 x - 1)) = \operatorname{Ch}^2 y - \cos^2 x$ .

• **b)**

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos z \overline{\cos z} = \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \left( \frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} \right) = \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{4} \\ &= \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{Ch}(2y) + \cos(2x)). \end{aligned}$$

Par les transformations  $\operatorname{ch}(2y) = 2 \operatorname{Ch}^2 y - 1$  et  $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$ , on obtient la relation cherchée  $|\cos z|^2 = \frac{1}{2} (2 \operatorname{Ch}^2 y - 1 + 1 - 2 \sin^2 x) = \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x$ .

• **c)** Nous avons  $\operatorname{sh} z = \operatorname{Sh}(x + iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^{i(y-ix)} - e^{-i(y-ix)}}{2} = i \sin(y - ix)$ .

D'après la relation **a)**,

$$|\operatorname{Sh} z| = |i \sin(y - ix)| = |\sin(y - ix)| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2(-x) - \cos^2 y} = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \cos^2 y}.$$

• **d)**  $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch}(x + iy) = \frac{e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^{i(y-ix)} + e^{-i(y-ix)}}{2} = \cos(y - ix)$ .

D'après la relation **b)**,  $|\operatorname{Ch} z| = |\cos(y - ix)| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2(-x) - \sin^2 y} = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \sin^2 y}$ .

**Exercice 3 :** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

**a)**  $\operatorname{Im}(\sin z) = 0$ , **b)**  $\operatorname{Re}(\operatorname{Sh} z) = 0$ , **c)**  $\sin z = \frac{4}{3}i$ , **d)**  $\operatorname{Sh} z = \frac{i}{2}$ , **e)**  $e^z = -2$ .

**Solution.** **a)** D'après l'exercice 1 **b)**,  $\sin z = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y$ .

La partie imaginaire de  $\sin z$  s'annule si  $\cos x \operatorname{Sh} y = 0$ , ce qui est équivalent à  $\cos x = 0$  ou  $\operatorname{Sh} y = 0$ .

D'où  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $y = 0$ .

**b)** Tout d'abord, nous séparons les parties réelles et imaginaires de la fonction  $\operatorname{Sh} z$ .

Nous avons  $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh}(x + iy) = \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch}(iy) + \operatorname{Ch} x \operatorname{Sh}(iy) = \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y$ .

La partie réelle de  $\operatorname{Sh} z$  s'annule si  $\operatorname{Sh} x \cos y = 0$ , d'où  $x = 0$  ou  $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**c)** D'après l'exercice 1 **b)**,  $\sin z = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y$ . Alors  $\sin z = \frac{4}{3}i$  entraîne  $\sin x \operatorname{Ch} y = 0$  et  $\cos x \operatorname{Sh} y = \frac{4}{3}$ . Puisque  $\operatorname{Ch} y \geq 1$ , on aura  $\sin x = 0$  ou  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En remplaçant dans la

deuxième équation on obtient  $\cos(k\pi) \operatorname{Sh} y = \frac{4}{3}$  ou  $\operatorname{Sh} y = \frac{4}{3 \cos(k\pi)} = \frac{4}{3(-1)^k}$ ,

d'où  $y = \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3(-1)^k}\right) = (-1)^k \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3}\right)$ , et donc les racines cherchés sont

$$z_k = k\pi + i(-1)^k \operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

d) D'après la question b),  $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y$ . Donc l'équation  $\operatorname{Sh} z = \frac{i}{2}$  est équivalente à  $\operatorname{Sh} x \cos y = 0$  et  $\operatorname{Ch} x \sin y = \frac{1}{2}$ .

Si  $\operatorname{Sh} x = 0$ , i.e.  $x = 0$ , on aura  $\sin y = \frac{1}{2}$  ou  $\left\{ y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Si  $\cos y = 0$  i.e.  $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , on obtient  $\operatorname{Ch} x \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \operatorname{Ch} x = \frac{1}{2}$  ou  $\operatorname{Ch} x = \frac{(-1)^k}{2}$  et ceci n'est pas possible car  $\operatorname{Ch} x \geq 1$ .

Alors, les racines de l'équation  $\operatorname{Sh} z = \frac{i}{2}$  sont  $z_k = i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$  ou  $z_k = i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

e) Si  $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = -2$ , alors  $e^x \cos y = -2$  et  $e^x \sin y = 0$ .

Puisque  $e^x > 0$ , on aura  $\sin y = 0$  ou  $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Donc la première équation devient

$$e^x \cos(k\pi) = -2 \text{ ou } e^x = \frac{-2}{\cos(k\pi)} = \frac{-2}{(-1)^k} = 2(-1)^{k+1}.$$

Ceci est possible seulement si  $k + 1$  est un nombre pair. Dans ce cas  $x = \ln 2$ . Alors les racines de l'équation  $e^z = -2$  sont  $z_k = \ln 2 + i(1 + 2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 4 :** Démontrer que  $e^{(\operatorname{Log} z)} = z$  et montrer que

l'égalité  $\operatorname{Log}(e^z) = z$  n'est pas toujours vérifiée.

**Solution.** Soit  $z$  un nombre complexe, nous avons

$$\begin{aligned} e^{(\operatorname{Log} z)} &= e^{\ln(|z|) + i \arg(z)} = e^{\ln(|z|)} \{ \cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \} \\ &= |z| \{ \cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \}. \end{aligned}$$

La dernière formule est exactement l'écriture du nombre complexe  $z$  sous forme trigonométrique, i.e.  $|z| \{ \cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)) \} = z$ , d'où  $\operatorname{Log}(e^z) = z$ .

En ce qui concerne la deuxième partie de l'exercice, par exemple dans le cas de la détermination principale, si nous prenons  $z = 4i\pi$ , nous obtiendrons  $\operatorname{Log}(e^z) = \operatorname{Log}(e^{4i\pi}) = \operatorname{Log}(1) = 0$  ce qui est différent de  $4i\pi$ .

=====  
**Exercice 5 :** Calculer **a)**  $\text{Log}(1+i)$ , **b)**  $i^i$ , **c)**  $(1-i)^{3-3i}$ .

**Solution.** **a)**  $\text{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i \arg(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

**b)**  $i^i = e^{i \text{Log } i} = e^{i(\ln|i| + i \arg i)} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ .

**c)**  $(1-i)^{3-3i} = e^{(3-3i) \text{Log}(1-i)} = e^{(3-3i)\{\ln(|1-i|) + i \arg(1-i)\}}$   
 $= e^{(3-3i)\{\ln \sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)\}} = e^{3 \ln \sqrt{2} + 3(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + 3i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln \sqrt{2})}$   
 $= 2^{\frac{3}{2}} e^{3(-\frac{1}{4} + 2k)\pi} \{\cos(3(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln \sqrt{2})) + i \sin(3(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \ln \sqrt{2}))\}$   
 $= 2\sqrt{2} e^{3(-\frac{1}{4} + 2k)\pi} \{\cos(\frac{3}{4}\pi + 3 \ln \sqrt{2}) - i \sin(\frac{3}{4}\pi + 3 \ln \sqrt{2})\}, k \in \mathbb{Z}$ .

=====  
**Exercice 6 :** Calculer les limites suivantes :

**a)**  $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\text{Ch}(iz) + i \text{Sh}(iz)}$ , **b)**  $\lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$ .

**Solution.** **a)**  $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\text{Ch}(iz) + i \text{Sh}(iz)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\text{Ch}(i\frac{\pi}{4}) + i \text{Sh}(i\frac{\pi}{4})} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i(i\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$  forme indéterminée.

Donc on doit trouver un moyen pour enlever l'indétermination, pour cela on va remplacer  $\text{Ch}(iz)$  par  $\cos z$  et  $i \text{Sh}(iz)$  par  $-\sin z$ . On obtient

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\text{Ch}(iz) + i \text{Sh}(iz)} &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cos z - \sin z} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z - \sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)}{\cos z - \sin z} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**b)**  $\lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i} = \frac{e^{-i\pi} + 1}{e^{-i\frac{\pi}{2}} + i} = \frac{-1 + 1}{-i + i} = \frac{0}{0}$  forme indéterminée.

Par décomposition de numérateur  $e^{2z} + 1 = (e^z)^2 - i^2 = (e^z - i)(e^z + i)$  nous voyons que

$$\lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i} = \lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{(e^z - i)(e^z + i)}{e^z + i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

=====  
**Exercice 7 :** Montrer que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$  n'existe pas.

**Solution.** Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont  $z$  tend vers 0.

Si  $z \rightarrow 0$  le long de l'axe des  $x$ , alors  $y = 0$  et  $z = x + iy = x, \bar{z} = x - iy = x$ ; la limite cherchée est donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ .

Si  $z \rightarrow 0$  le long de l'axe des  $y$ , alors  $x = 0$  et  $z = x + iy = iy, \bar{z} = x - iy = -iy$ ; la limite cherchée est  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1$ .

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont  $z \rightarrow 0$ , il n'y a pas de limite.