

Série d'exercices n° 2 : Dérivation dans $\mathbb{C}$ - Équations de Cauchy Riemann

Exercice 1 : À l'aide de la définition calculer la dérivée de $f(z) = z^2 - z$.

Solution. Par définition, la dérivée en z_0 si elle existe est

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z - (z_0^2 - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2 - (z - z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0) - (z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0 - 1)}{z - z_0} = 2z_0 - 1. \end{aligned}$$

La limite existe pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$, donc la dérivée de f est donnée par $f'(z) = 2z - 1$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2 : Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a) $f(z) = \bar{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$ **b)** $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$ **c)** $f(z) = \operatorname{Im}(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Solution. Par définition, la fonction f n'est pas dérivable en z_0 si la limite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'existe pas, i.e. la limite dépend de la manière dont z tend vers z_0 .

a) Si $z = x + iy$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - iy - (x_0 - iy_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$

Pour $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite cherchée est $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$

Pour $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite cherchée est $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1.$

La limite obtenue dépendant de la façon dont $z \rightarrow z_0$, la dérivée n'existe pas i.e. la fonction f n'est dérivable en aucun point.

b) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - x_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$

Si $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite est $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$

Si $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite est $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{0}{iy - iy_0} = 0.$

c) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{y - y_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}.$

Si $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite est $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$

Si $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite est $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{iy - iy_0} = \frac{1}{i} = -i.$

Exercice 3 : Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin y)$, sur $\mathbb{C}$ **b)** $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$, sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, sur $\mathbb{C}$ **d)** $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Solution. Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

a) $u = e^{-y} \cos x$ et $v = e^{-y} \sin y$. $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \sin y + e^{-y} \cos y$. Il est clair que $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, la première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite. Alors la fonction f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Pour la même raison que celle qui précède f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$.

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

d) $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = x^2 - y^2 + 2xy$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y$.

Les équations de Cauchy-Riemann sont ainsi satisfaites et la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4 : a) Montrer que la fonction u définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

b) Mêmes questions pour la fonction

$$u(x, y) = y \cos y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Solution. a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$. $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$.

On obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2x - 3. \quad (2)$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à y , il vient

$$v = 2xy - y^2 - 2y + C_1(x), \quad (3)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (3) dans (2) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y + 2x - 3 \rightarrow \frac{d}{dx}C_1(x) = 2x - 3 \rightarrow C_1(x) = x^2 - 3x + c,$$

où c désigne une constante. D'où de (3)

$$v = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + c.$$

$$\text{b) } \frac{\partial u}{\partial x} = y \cos y \operatorname{sh} x + \sin y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x = (y \cos y + \sin y) \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (y \cos y + \sin y) \operatorname{ch} x + \sin y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x = (y \cos y + 2 \sin y) \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x. \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y \operatorname{ch} x - y \sin y \operatorname{ch} x + x \cos y \operatorname{sh} x = (\cos y - y \sin y) \operatorname{ch} x + x \cos y \operatorname{sh} x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-\sin y - \sin y - y \cos y) \operatorname{ch} x - x \sin y \operatorname{sh} x, \quad (5)$$

Par addition de (4) et (5) on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, la fonction u est donc harmonique.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = (y \cos y + \sin y) \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = (-\cos y + y \sin y) \operatorname{ch} x - x \cos y \operatorname{sh} x. \quad (7)$$

En intégrant (par parties) l'équation (6) par rapport à y , il vient

$$v = (y \sin y + \cos y - \cos y) \operatorname{sh} x - x \cos y \operatorname{ch} x + C_1(x) = y \sin y \operatorname{sh} x - x \cos y \operatorname{ch} x + C_1(x). \quad (8)$$

Par substitution de (8) dans (7) on obtient

$$y \sin y \operatorname{ch} x - \cos y \operatorname{ch} x - x \cos y \operatorname{sh} x + \frac{d}{dx} C_1(x) = (-\cos y + y \sin y) \operatorname{ch} x - x \cos y \operatorname{sh} x$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \rightarrow C_1(x) = c, \text{ où } c \text{ désigne une constante.}$$

D'où de (8) on obtient

$$v = y \sin y \operatorname{sh} x - x \cos y \operatorname{ch} x + c.$$

=====

Exercice 5 : Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes?

$$\text{a) } f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \text{ b) } g(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}.$$

Solution. a) Nous avons $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} = \frac{z+3}{(z-1)(z+1)}$, puisque $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+3}{(z+1)} = 2 \neq 0$, le point $z = 1$ est un pôle simple.

De même $z = -1$ est aussi un pôle simple à cause de $\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+3}{(z-1)} = -1 \neq 0$.

Nous pouvons déterminer δ tel qu'il n'existe pas d'autre singularité que $z = 1$ dans le cercle $|z-1| = \delta$, il suffit de choisir $\delta = 1$, on en déduit que $z = 1$ est point singulier isolé. De la même façon $z = -1$ est aussi un point singulier isolé.

b) On obtient des singularités pour $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0$, i.e. $\frac{1}{z^2} = k\pi$ ou $z = \pm \frac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$. De plus comme $g(z)$ n'est pas définie pour $z = 0$, ce point est aussi une singularité. De même, puisque $z = 0$ est une

singularité de $g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\sin(z^2)}$, $z = \infty$ est une singularité de $g(z)$.

Décrivons maintenant la nature de ces singularités. En utilisant la règle de L'Hôpital

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \left(z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \right) g(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3} \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi} \cos(k\pi)} \neq 0$$

et

$$\lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \left(z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \right) g(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3} \cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi} \cos(k\pi)} \neq 0.$$

Les singularités $z = \pm \frac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$ sont donc des pôles simples. Comme nous pouvons entourer chacune de ces singularités par un cercle de rayon δ_k n'en contenant pas d'autre, on en déduit qu'elles sont isolées.

Etant donné que l'on ne peut pas trouver d'entier n tel que $\lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)^n g(z) = A \neq 0$, on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle. De plus comme tout cercle de rayon δ centré en $z = 0$ contient d'autres singularités que $z = 0$, on en déduit que $z = 0$ est une singularité non isolée.