USTHB 2014-2015 Semestre 2 — **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques — **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section G**

Série d'exercices n° 3 : Intégration dans $\mathbb{C}$

Exercice 1 :

Calculer $\displaystyle\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)\,dx + (3x - y)\,dy$ le long de

a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$,

b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0,3)$ à $(2,3)$ et $(2,3)$ à $(2,4)$,

c) le segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,4)$.

Exercice 2 :

Évaluer $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C dans les cas suivants.

a) la courbe C définie par $z = t^2 + it$,

b) la courbe C formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$.

Exercice 3 :

Évaluer les intégrales $\displaystyle\oint_C dz$, $\displaystyle\oint_C zdz$ et $\displaystyle\oint_C z - idz$,

où C est une courbe fermée simple.

Exercice 4 :

Évaluer $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-a}dz$ où C désigne une courbe fermée et $z = a$ est

a) à l'extérieur de C, **b)** à l'intérieur de C.

Exercice 5 :

Soit C le cercle $|z| = 3$. Évaluer

a) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$, **b)** $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$, **c)** $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{(z+1)(z-4)}dz$.

Exercice 6 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z = e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z| = 1$, d'où $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.