

Tous ces exercices sont associés au cours L3 de mathématiques du Département Géosciences. Ils sont liés au chapitre intitulé : "Résolution des systèmes linéaires  $Ax = b$  par des méthodes itératives."

## Exercice 1

Soit  $B$  (resp.  $\mathcal{L}_1$ ) la matrice d'itération de la méthode itérative de Jacobi (resp. Gauss-Seidel) de résolution des systèmes linéaires  $Ax = b$ . Le but de cet exercice est de montrer (sur des exemples) qu'en général on ne sait rien dire de la comparaison de deux méthodes itératives.

1) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

montrer que  $\rho(B) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$ .

2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

montrer que  $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(B)$ .

## Exercice 2

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

1) Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est-elle définie positive ?

2) Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est-elle SDD (strictement diagonalement dominante) ?

3) Pour quelles valeurs de  $a$  la méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ?

4) Écrire la matrice  $B$  de la méthode de Jacobi.

5) Pour quelles valeurs de  $a$  la méthode de Jacobi converge-t-elle ? Quelle remarque peut-on faire à propos de la question 2) sachant que Jacobi converge si la matrice  $A$  est SDD ?

6) Écrire la matrice  $\mathcal{L}_1$  de la méthode de Gauss-Seidel ? Calculer  $\rho(\mathcal{L}_1)$ .

7) Pour quelles valeurs de  $a$  la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que la méthode de Jacobi ?

### Exercice 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\alpha \\ -\alpha & 4 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

trouver toutes les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  telles que

- 1) la méthode de Gauss-Seidel converge,
- 2) la matrice  $A$  est définie positive.