Correction exercice 1

1) Soit la matrice A du 1) et B la matrice itérative de Jacobi associée. Avec les notations du chapitre, on a

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On calcule les valeurs propres par les racines du polynôme $\det(B - \lambda I)$ en λ. Il est facile de vérifier que $\det(B - \lambda I) = -\lambda^3$. $\lambda = 0$ est racine triple, donc $\rho(B) = 0$ et Jacobi converge.

Soit maintenant $\mathcal{L}_1$ la matrice itérative de Gauss-Seidel. Par définition on a $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$. Tous calculs faits on a :

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

et donc

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Il est facile de vérifier que $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = -\lambda(2-\lambda)^2$. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{L}_1$ a pour racines $\lambda_1 = 0$ et la racine double $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, donc $\rho(\mathcal{L}_1) = 2 > 1$ et Gauss-Seidel diverge.

On a bien $\rho(B) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$.

2) Soit la matrice A du 2) et B la matrice itérative de Jacobi associée. On a

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice B est $\det(B - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 5/4) = 0$. Les racines sont $\lambda_1 = 0$ et les deux nombres complexes conjuguées $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{5}/2$. On a donc $\rho(B) = \sqrt{5}/2$. La méthode de Jacobi diverge.

Soit maintenant la méthode de Gauss-Seidel. Tous calculs faits on a :

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

et donc

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{L}_1$ est $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = -\lambda(1/2 - \lambda)^2$. Les racines sont $\lambda_1 = 0$ et la racine double $\lambda_{2,3} = 1/2$. On a $\rho(\mathcal{L}_1) = 1/2$ et par conséquent la méthode de Gauss-Seidel converge. On a bien $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(B)$. $\square$

Correction exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

1) Calculons ses valeurs propres et étudions pour quelles valeurs de a elles sont toutes strictement positives - ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour une matrice d'être définie positive (théorème 2.18 du livre, théorème démontré au cours). Soit λ une valeur propre, on a :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ a & 1-\lambda & a \\ 0 & a & 1-\lambda \end{pmatrix}, \tag{8}$$

soit $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - a^2\right] - a\left[a(1-\lambda)\right]$. Posons $\mu = 1-\lambda$, on a $\det(A-\lambda I) = \mu(\mu^2-a^2) - a^2\mu = \mu(\mu^2 - 2a^2)$ et les racines de $\det(A-\lambda I) = 0$ sont $\mu = 0$ et $\mu = \pm\sqrt{2}|a|$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ et $\lambda 1 \pm a\sqrt{2}$.

Si $-\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{2}/2$ toutes les valeurs propres sont strictement positives et la matrice A est symétrique définie positive. Pour ces valeurs de a la matrice A est inversible car (propriété rappelée au cours) $\det(A) = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i(A)$ et donc $\det(A) > 0$, ce qui prouve l'inversibilité de A.

2) Pour que la matrice A soit SDD il faut que $|a_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, $\forall i = 1, ..., n$ avec $n = 3$. Il faut donc $1 > 2|a|$ soit $-1/2 < a < 1/2$. On voit qu'il existe des valeurs de a (par exemple $1/2‘a < \sqrt{2}/2$) pour lesquelles une matrice peut être définie positive sans être SDD - on retrouve une observation faite au cours page 10.

3) La matrice diagonale D de A est évidemment inversible, la matrice A est symétrique définie positive pour $-\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{2}/2$, donc, d'après le théorème 1.3.2 des notes du cours, on a $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$ et Gauss-Seidel converge.

4) Cette question est triviale. Avec les notations du cours la matrice d'itération B de la matrice de Jacobi s'écrit $B = D^{-1}(E+F)$, soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

5) Calculons les valeurs propres de B, c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique de B. On a :

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ -a & -\lambda & -a \\ 0 & -a & -\lambda \end{pmatrix}, \tag{10}$$

et $\det(B-\lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - a^2) + a(a\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + 2a^2)$, les valeurs propres sont 0 et $\pm a\sqrt{2}$. Si donc on a $-\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{2}/2$ alors $\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)| = \sqrt{2}|a| < 1$ et la méthode de Jacobi converge.

On sait par le théorème 1.3.7 que Jacobi converge si A est SDD, c'est-à-dire, d'après le 2), si $-1/2 < a < 1/2$. On vérifie ainsi, comme on l'a écrit au bas de la page 10 des notes du cours, que ce théorème n'énonce qu'une condition suffisante de convergence puisqu'on vient de prouver que Jacobi converge pour $-\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{2}/2$.

6) On a $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$ soit

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & -a^3 & a^2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

car

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

On a donc

$$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ 0 & a^2-\lambda & -a \\ 0 & -a^3 & a^2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} a^2-\lambda & -a \\ -a^3 & a^2-\lambda \end{pmatrix}, \tag{13}$$

d'où $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = -\lambda \left[(a^2-\lambda)^2 - a^4\right]$, les racines de $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = 0$ sont $\lambda = 0$ racine double et $\lambda = 2a^2$. On a donc $\rho(\mathcal{L}_1) = \max_i |\lambda_i| = 2a^2$.

7) Gauss-Seidel converge si $\rho(\mathcal{L}_1) = 2a^2 < 1$, c'est-à-dire si $-\sqrt{2}/2 < a < \sqrt{2}/2$. C'est le même intervalle de convergence que la méthode de Jacobi d'après la question 4, mais, toujours d'après la question 4, $\rho(\mathcal{L}_1) = 2a^2 = (|a|\sqrt{2})^2 = (\rho(B))^2$ et la méthode de Gauss-Seidel converge deux foix plus vite que la méthode de Jacobi, ce que l'on savait par le théorème 1.3.6 et la remarque 1.3.7 qui suit, puisque la matrice A de cet exercice est tridiagonale par points. Cet exercice illustre aussi que, dans ce cas, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent simultanément (voir encore le théorème 1.3.6).

Correction exercice 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\alpha \\ -\alpha & 4 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Avec les notations du cours on a :

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ \alpha/16 & 1/4 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

et

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ \alpha/16 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha/4 \\ 0 & \alpha^2/16 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Dès lors

$$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha/4 \\ 0 & -\lambda + \alpha^2/16 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

implique que les deux racines de $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = 0$ sont $\lambda = 0$ et $\lambda = \alpha^2/16$ et donc $\rho(\mathcal{L}_1) = \alpha^2/16$. Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$, c'est-à-dire lorsque $\alpha^2 < 16$ ou encore lorsque $-4 < \alpha < 4$.

2) Calculons les valeurs propres de A et exhibons les conditions de positivité de celles-ci. On a

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -\alpha \\ -\alpha & 4-\lambda \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Cherchons les racines du polynôme caractéristique. On a $\det(A-\lambda I) = (4-\lambda)^2 - \alpha^2$ et donc $\det(A-\lambda I) = 0$ si et seulement si $\lambda = 4 \pm \alpha$. Les deux valeurs propres sont donc strictement positives si et seulement si $-4 < \alpha < 4$.

N.B. : On a $a_{i,i} > 0$, les questions 1) et 2) sont une illustration du corollaire 1.3.2 du cours. □