
Chapitre 6

Résolution des systèmes linéaires

Sommaire

6.1	Introduction	80
6.2	Rappels et compléments sur les matrices	81
6.2.1	Notations et définitions	81
6.2.2	Réduction des matrices carrées	86
6.2.3	Normes vectorielles et normes matricielles	87
6.2.4	Conditionnement d'un système linéaire	90

6.1 Introduction

Les systèmes linéaires d'équations sont associés à de nombreux problèmes en ingénierie et en sciences, ainsi qu'aux applications des mathématiques aux sciences sociales et à l'étude quantitative des problèmes commerciaux et économiques.

Un système d'équations linéaires (ou système linéaire) est un ensemble d'une ou plusieurs équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues.

En général, un système de m équations linéaires à n inconnues peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \quad (6.1)$$

Où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les inconnues et les nombres a_{ij} sont les coefficients du système, et $b_1, b_2, \dots, b_m$ sont les termes du second membre. Souvent, les coefficients et les inconnues sont des nombres réels ou complexes.

On peut utiliser la notation matricielle, qui est beaucoup plus pratique et surtout plus compacte.

On écrit alors le système précédent sous la forme

$$Ax = b,$$

où A est une matrice de taille $m \times n$, x est un vecteur de taille n et b est un vecteur de taille m .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Si $m > n$ on dit que le système est surdéterminé. Si $m = n$ alors la matrice A est carrée et d'ordre n .

Si la matrice A est inversible alors le système linéaire (6.1) admet une unique solution $x = A^{-1}b$ où A^{-1} est la matrice inverse de A . Ainsi théoriquement le problème revient à calculer A^{-1} . Mais en pratique ce calcul est difficile. Il existe plusieurs méthodes classiques pour résoudre le système linéaire (6.1) sans calculer A^{-1} . Ces méthodes de résolution se classent en deux grandes catégories :

- Les méthodes directes qui permettent d'obtenir la solution en un nombre fini d'opérations soit par triangularisation ou soit par décomposition de la matrice A . Les principales méthodes sont :
 - L'élimination de Gauss,
 - La décomposition LU,
 - La décomposition de Cholesky,
 - La décomposition de QR,
- Les méthodes itératives qui consistent à construire une suite $(x_n)_n$ qui converge vers la solution. Les principales méthodes sont :
 - Méthode de Jacobi,
 - Méthode de Gauss-Seidel,
 - Méthode du gradient conjugué.

Le choix de la méthode dépend fortement du type (forme) de la matrice.

Avant de traiter ces méthodes, nous allons d'abord rappeler des notions et notations de base relatives aux systèmes linéaires et aux matrices.

6.2 Rappels et compléments sur les matrices

6.2.1 Notations et définitions

Généralités

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de taille n (lignes) $\times m$ (colonnes), à éléments dans $\mathbb{K}$.

- On appelle produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$
 - euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, définie pour $u, v \in \mathcal{M}_{n,1}$ par

$$\langle u, v \rangle = v^t u = u^t v = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in \mathbb{R}.$$

– hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, définie pour $u, v \in \mathcal{M}_{n,1}$ par

$$\langle u, v \rangle = v^* u = \overline{u^* v} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i} \in \mathbb{C}.$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, le produit AB est défini par

$$(AB)_{ik} = \sum_{\ell=1}^m a_{i\ell} b_{\ell k}.$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle la matrice transposée (ou la transposée) de A , la matrice $A^t \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, également notée A^T , ${}^t A$ ou A' , obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A . Plus précisément $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.
- La matrice conjuguée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ à coefficients complexes est la matrice $\overline{A}$ constituée des éléments de A conjugués. Plus précisément, si on note a_{ij} et b_{ij} les coefficients respectifs de A et de $\overline{A}$ alors $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$.
- La matrice adjointe A^* (aussi appelée matrice transconjuguée) d'une matrice A à coefficients complexes est la matrice transposée de la matrice conjuguée de A . Dans le cas particulier où A est à coefficients réels, sa matrice adjointe est donc simplement sa matrice transposée.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{K})$ alors $(AB)^t = B^t A^t$ et $(AB)^* = B^* A^*$.

Matrices par blocs

Une matrice par blocs ou matrice partitionnée est une matrice divisée en sous-matrices rectangulaires à partir d'une division de sa diagonale : ces sous-matrices sont appelées blocs. On peut dire également que la matrice est écrite en termes de sous-matrices mises côte à côte.

Étant donné une matrice $\mathbf{A} (m \times p)$ avec q partitions de lignes et s de colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qs} \end{pmatrix}$$

et une matrice $\mathbf{B}$ ($p \times n$) avec s partitions de lignes et r partitions de colonnes

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

et à la condition que le nombre de colonnes de chaque bloc A_{ij} soit égal au nombre de lignes du bloc B_{jk} , le produit matriciel $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ peut être effectué par blocs, donnant $\mathbf{C}$, matrice ($m \times n$) avec q partitions de lignes et r partitions de colonnes. Les blocs sous-matrices C_{ik} de $\mathbf{C}$ sont calculés de la manière suivante

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^s A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, q \text{ et } \beta = 1, 2, \dots, r.$$

Matrices carrées, spectre

Dans ce qui suit, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n , c'est-à-dire les matrices carrées de dimension $n \times n$.

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- inversible si il existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$,
- symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A^t = A$,
- hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A^* = A$,
- orthogonale si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A^t = A^{-1}$,
- unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A^* = A^{-1}$,
- normale si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $AA^* = A^*A$,
- diagonale si $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, on note alors $A = \text{diag}(a_{ii})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Les matrices triangulaires sont importantes pour la résolution numérique des systèmes car elles ont les propriétés suivantes :

- La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure et réciproquement.
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure et le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
- L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire inférieure et l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.

Proposition 28

Si A et B sont deux matrices inversibles alors

- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^t est inversible et $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle :

- trace de A notée $\text{tr}(A)$, le scalaire somme des coefficients de sa diagonale principale

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$
- déterminant de A : Si $c_1, \dots, c_n$ sont les vecteurs colonnes de A et si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_n)$ où $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée sur $\mathbb{K}^n$ valant 1 en $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Le déterminant de A se note fréquemment

avec des barres verticales

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et il vérifie la formule de Leibniz

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(i),i},$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ (1 pour une permutation paire, -1 pour une permutation impaire), il obéit aussi à la règle de calcul de développement par rapport à une ligne ou une colonne,

- spectre de A , noté $\text{sp}(A)$, le sous-ensemble défini par $\text{sp}(A) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i(A)\}$ où $\lambda_i(A)$ est la i -ème valeur propre, c'est-à-dire la i -ème racine du polynôme caractéristique

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

- rayon spectral de A , noté $\rho(A)$, le réel positif $\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)|, 1 \leq i \leq n\}$.
- À toute valeur propre λ d'une matrice A est associé au moins un vecteur propre $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $v \neq 0$, $Av = \lambda v$. Le sous-espace défini par $\{v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Av = \lambda v\}$ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Propriétés :

- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$,
- $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$, si A inversible $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
- la matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$,
- pour tout scalaire (complexe ou réel) α , $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$,
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$,
- $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A)$,
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

6.2.2 Réduction des matrices carrées

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit une matrice diagonale. Formellement,

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonalisable} \iff \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ inversible telle que } P^{-1}AP \text{ diagonale.}$$

Théorème 29

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à n , ce qui est le cas si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A .

Si une telle base a été trouvée, on peut former la matrice P ayant ces vecteurs de base comme colonnes, et $P^{-1}AP$ sera une matrice diagonale dont les entrées diagonales sont les valeurs propres de A . La matrice P est appelée matrice de passage.

Corollaire 30

Une matrice dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.

Théorème 31 (Théorème de Schur)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors, il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice normale. Alors, il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1}AU$ soit diagonale.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors, il existe une matrice orthogonale O telle que $O^{-1}AO$ soit diagonale.

Les puissances d'une matrice diagonalisable s'expriment sous la forme $A^k = PD^kP^{-1}$ où la puissance de la diagonale se calcule en élevant simplement chaque coefficient diagonal à la même puissance k .

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

En conséquence, pour tout polynôme Q , la matrice $Q(A)$ est égale à $P \cdot Q(D) \cdot P^{-1}$, et $Q(D)$ s'exprime en appliquant simplement Q à chaque coefficient diagonal de D .

Proposition 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (*resp.* hermitienne). Alors les valeurs propres de A sont réelles. Si de plus, A est positive (*resp.* définie positive) *i.e.* si, pour tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $\langle Av, v \rangle \geq 0$ (*resp.* $\langle Av, v \rangle > 0$), les valeurs propres de A sont positives (*resp.* strictement positives).

On appelle valeurs singulières de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les racines carrées positives des valeurs propres de A^*A (ou A^tA si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Les valeurs singulières sont réelles et positives, puisque, si $A^*Av = \lambda v$, $v^*A^*Av = \lambda v^*v \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$.

Théorème 33

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe deux matrices orthogonales U et V telles que U^tAV soit diagonale.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, il existe deux matrices unitaires U et V telles que U^*AV soit diagonale.
- Dans les deux cas, les éléments de la diagonale sont les valeurs singulières (réelles et positives) de A . On parle alors de décomposition en valeurs singulières.

6.2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

Une **norme** sur un espace **vectoriel** V est une application $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V$,
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée norme vectorielle. On appelle espace vectoriel normé un espace vectoriel muni d'une norme.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}, \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|.$$

Plus généralement, pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\cdot\|_p$ définie par

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u, v \in \mathbb{K}^n$ on a l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Si $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

- $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (inégalité triangulaire),
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Etant donné une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\cdot\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|A\|_s = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ \|v\| \leq 1}} \|Av\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ \|v\| = 1}} \|Av\|$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée). De plus

$$\|Av\| \leq \|A\|_s \|v\|, \quad \forall v \in \mathbb{K}^n.$$

Il existe ainsi au moins un vecteur $u \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u \neq 0 \quad \text{et} \quad \|A\|_s = \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

- $\|A\|_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$
- $\|A\|_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2.$

- $\|A\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$
- La norme $\|\cdot\|_2$ est invariante par transformation unitaire, *i.e.* :

$$UU^* = I \implies \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

- Par ailleurs, si la matrice A est normale ($A^*A = AA^*$) alors $\|A\|_2 = \rho(A).$
- Si la matrice A est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|A\|_2 = \rho(A).$
- Si la matrice A est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|A\|_2 = 1.$
- Si A est une matrice carrée quelconque et $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

- Si A est une matrice carrée quelconque et $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

- L'application $\|\cdot\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|A\|_E \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}$$

est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

- Si $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée, et A une matrice vérifiant $\|A\| < 1$, alors la matrice $I + A$ est inversible, et

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

- Si une matrice de la forme $I + A$ est singulière, alors nécessairement $\|A\| \geq 1$ pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.
- Si A est une matrice carrée quelconque et $\|\cdot\|$ une norme matricielle quelconque, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A).$$

6.2.4 Conditionnement d'un système linéaire

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière A , associé à cette norme, est le nombre

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Nous noterons $\text{cond}_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$.

Soit A une matrice régulière. On a les propriétés suivantes

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$.
- $\text{cond}_p(A) \geq 1$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
- $\text{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et Q matrice unitaire.

Théorème 34

Soit A une matrice inversible. Soient x et $x + \Delta x$ les solutions respectives de

$$Ax = b \quad \text{et} \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Supposons $b \neq 0$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible. Pour une matrice A donnée, on peut trouver des vecteurs $b \neq 0$ et $\Delta b \neq 0$ tels qu'elle devienne une égalité.

Théorème 35

Soient A et $A + \Delta A$ deux matrices inversibles. Soient x et $x + \Delta x$ les solutions respectives de

$$Ax = b \quad \text{et} \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b.$$

Supposons $b \neq 0$, alors on a

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$