# Chapitre 5

# Résolution d'équations non linéaires

## Sommaire

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les méthodes d'approximation des solutions d'équations algébriques non linéaires. Nous nous limiterons au cas de la recherche des racines d'une seule équation d'une variable.

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Nous serons intéressés à trouver des points $x$ pour lesquels

$$f(x) = 0.$$

Introduisons dès maintenant la terminologie qui nous sera utile pour traiter ce problème.

**Définition 24**

Une valeur de $x$ solution de $f(x) = 0$ est appelée une racine ou un zéro de la fonction $f(x)$ et est notée $r$.

Nous avons tous appris au secondaire comment résoudre l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dont les deux racines sont

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Il s'agit d'un cas simple dans lequel les racines peuvent être calculées à l'aide d'une formule analytique. Il existe des formules pour trouver les racines des polynômes de degré 3 et 4, mais elles sont assez complexes. Dans le cas plus général, lorsque $f$ est un polynôme de degré qui est $\geq 5$, les formules analytiques (par radicaux) pour les racines ne plus exister. Non pas que les mathématiciens ne l'aient pas encore trouvées, mais Abel et par la suite Galois ont démontré que ces formules n'existe pas.

Dans la plupart des cas, lorsque $f$ est une fonction arbitraire, il n'y a pas de méthode analytique pour calculer les racines. Au lieu de cela, nous devons utiliser des méthodes d'approximation. En fait, même dans les cas où des formules exactes sont disponibles, comme avec des polynômes de degré 3 ou 4, une formule exacte peut être trop complexe pour être utilisée en pratique, et les méthodes d'approximation peuvent rapidement fournir une solution précise.

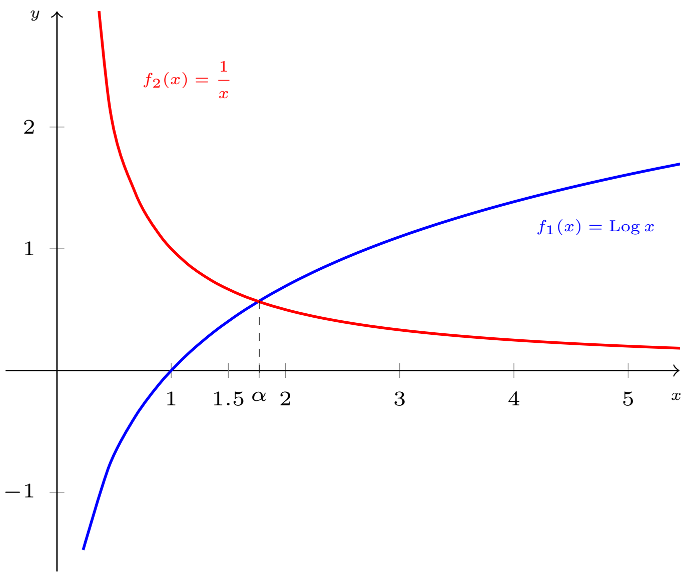
### 5.1.1 Localisation d'une racine

Il n'y a vraiment pas beaucoup d'outils généraux pour savoir à l'avance si le problème de recherche de racines peut être résolu. Pour nos besoins, le problème le plus important sera d'obtenir des informations sur l'existence ou non d'une racine, et si une racine existe, il sera alors important de tenter d'estimer un intervalle auquel appartient cette racine. Pour localiser une telle racine, en général, deux méthodes se présentent.

#### Méthode graphique

L'une de nos premières tentatives pour résoudre les problèmes de recherche de racines peut être d'essayer de tracer le graphe de la fonction. Après tout, si le but est de résoudre $f(x) = 0$, et que la fonction $f$ peut être tracée de manière à ce que l'intersection de $f(x)$ avec l'axe des $x$ soit visible, alors nous devrions avoir une bonne idée de l'endroit où chercher la racine. Il n'y a absolument rien de mal avec une telle méthode, mais il n'est pas toujours facile de tracer le graphe de la fonction.
Parfois, il arrive que $f$ se décompose en deux fonctions $f_1$ et $f_2$ simples à étudier, telles que $f = f_1 - f_2$, et on cherche les points d'intersection des graphes de $f_1$ et $f_2$, dont les abscisses sont exactement les racines de $f$.

**Exemple 30**
La fonction $f$ définie par $f(x) = \operatorname{Log} x - \dfrac{1}{x}, x \in ]0, +\infty[$ a une racine unique dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. En effet, posons $f_1(x) = \operatorname{Log} x$ et $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors $f(x) = 0$ équivalent à $f_1(x) = f_2(x)$ et d'après le graphe ci-contre il existe $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ telle que $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$.




■

### Méthode du théorème des valeurs intermédiaires

Ce qui est parfois plus facile, c'est de vérifier que la fonction $f$ est continue, auquel cas il suffit de trouver un point $a$ dans lequel $f(a) > 0$, et un point $b$, dans lequel $f(b) < 0$. La continuité garantira alors, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un point $c$ entre a et b pour lequel $f(c) = 0$, et la recherche de ce point peut alors commencer. Comment trouver de tels points $a$ et $b$? Encore une fois, il n'y a vraiment pas de méthode générale. Une combinaison d'intuition, de bon sens, de graphiques, de réflexion et d'essais à plusieurs reprises est généralement utile.

**Exemple 31**

Considérons le polynôme $p$ défini par

$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 10.$$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues et d'apres le tableau suivant

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $266$ | $68$ | $-4$ | $-16$ | $-10$ | $-4$ | $8$ | $56$ | $194$ |

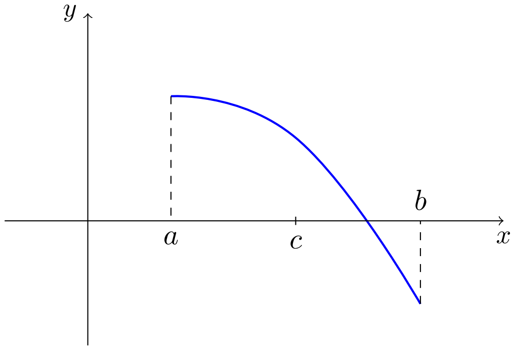
le polynôme $p$ a au moins deux racines réelles $\alpha_1 \in \,]-3, -2[$ et $\alpha_2 \in \,]1, 2[$. ∎

Dans ce qui suit, nous présentons plusieurs méthodes de résolution, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients.

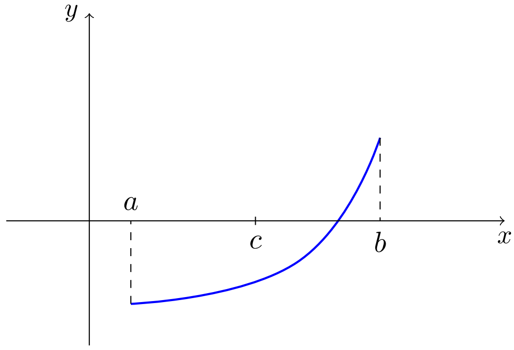
Les méthodes que nous allons décrire sont toutes des méthodes itératives. De telles méthodes commenceront généralement par une estimation initiale de la racine (ou du voisinage de la racine) et tenteront progressivement de s'approcher de la racine. Dans certains cas, la suite d'itérations convergera vers une limite, auquel cas nous nous demanderons alors si le point limite est réellement une solution de l'équation. Si tel est effectivement le cas, une autre question intéressante est à quelle vitesse la méthode converge-t-elle vers la solution?

## 5.2 Méthode de dichotomie (ou de bissection)

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f$ a des signes opposés aux extrémités $a$ et $b$, c'est-à-dire $f(a) f(b) < 0$.



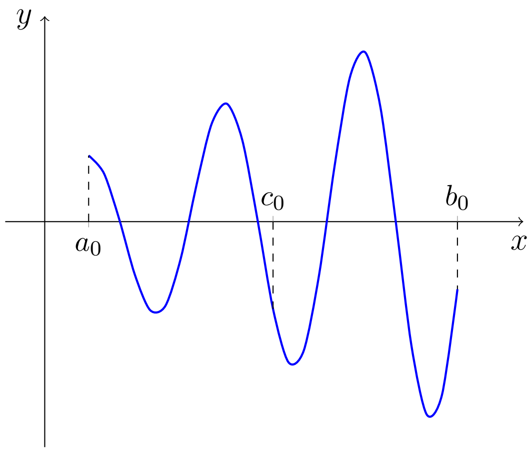

ou

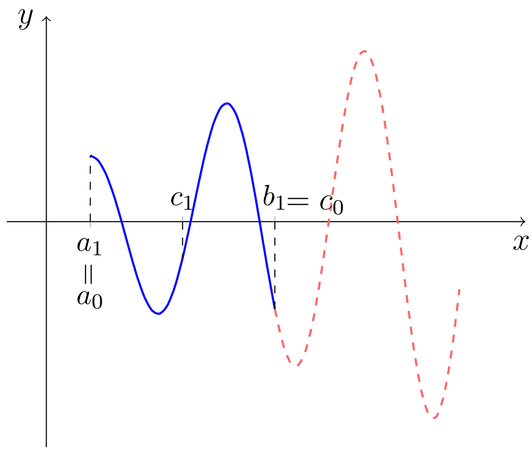



Il existe au moins une racine $r$ dans l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(r) = 0$. Si de plus $f$ est strictement monotone dans l'intervalle $[a, b]$, alors $r$ est unique.

La méthode de dichotomie, aussi appelée méthode de bisection, consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en deux sous-intervalles, $c = \frac{a+b}{2}$.

Cela génère deux sous-intervalles, $[a, c]$ et $[c, b]$, de mêmes longueurs. Nous voulons conserver le sous-intervalle qui est garanti pour contenir une racine. Bien sûr, dans le cas rare où $f(c) = 0$, nous avons terminé. Sinon, on vérifie si $f(a) f(c) < 0$. Si oui, on garde le sous-intervalle gauche $[a, c]$. Si $f(a) f(c) > 0$, on garde le sous-intervalle droit $[c, b]$. Cette procédure se répète jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait : on fixe un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et on s'arrête quand $|f(c)| < \varepsilon$. Pour simplifier la notation, nous désignons les intervalles successifs par $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1], \cdots$. Les deux premières itérations de la méthode de dichotomie sont représentées sur la figure ci-dessous.




Noter que dans le cas illustré sur la figure ci-dessus, la fonction $f$ a plusieurs racines mais la méthode converge vers une seule d'entre elles.

Nous aimerions maintenant comprendre si la méthode de la bissection converge toujours vers une racine. Nous aimerions également savoir à quel point nous sommes proches d'une racine après avoir répété plusieurs fois l'algorithme. Nous notons d'abord que

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_0 \qquad \text{et} \qquad b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq a_0.$$

Nous remarquons également que chaque itération réduit la longueur de l'intervalle de moitié, c'est-à-dire,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right), \qquad n \geq 0,$$

ce qui signifie que

$$b_n - a_n = 2^{-n}\left(b_0 - a_0\right).$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées, et donc convergent. Également,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n}\left(b_0 - a_0\right) = 0,$$

de sorte que les deux suites convergent vers la même valeur. Nous notons cette valeur par $r$, c'est-à-dire,

$$r = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Puisque $f(a_n) f(b_n) \leq 0$, donc $(f(r))^2 \leq 0$, ce qui signifie que $f(r) = 0$, c'est-à-dire que r est une racine de $f$.

Nous supposons maintenant que nous nous arrêtons dans l'intervalle $[a_n, b_n]$. Cela signifie que $r \in [a_n, b_n]$. Étant donné un tel intervalle, si nous devons deviner où est la racine (dont nous savons qu'elle est dans l'intervalle), il est facile de voir que la meilleure estimation de l'emplacement de la racine est le centre de l'intervalle, c'est-à-dire

$$r \simeq c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Dans ce cas, nous avons $|r - c_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$.

Nous résumons ce résultat avec le théorème suivant.

**Théorème 25**

Si $[a_n, b_n]$ est l'intervalle obtenu dans la $n$-ième itération de la méthode de dichotomie, alors les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ existent, et

$$r = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n, \qquad \text{où} \qquad f(r) = 0.$$

De plus, si $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ alors

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}\left(b_0 - a_0\right).$$

**Remarque 26**

Pour garantir que l'erreur $|r - c_n| < \varepsilon$, pour une tolérance $\varepsilon$ donnée, il suffit d'effectuer $k_{min}$ itérations, où $k_{min}$ est le plus petit entier tel que

$$k_{min} > \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\mathrm{Log}\, 2} - 1.$$

**Exemple 32**

Soit à résoudre par la méthode de dichotomie $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [1, 2]$. On a

$$f(1)\, f(2) = -4 \times 3 = -12 < 0.$$

On a alors $c_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$ et $f(1.5) = -1.875$. L'intervalle $[1.5, 2]$ possède encore un changement de signe, ce qui n'est pas le cas pour l'intervalle $[1, 1.5]$.

Le nouvel intervalle de travail est donc $[1.5, 2]$, dont le milieu est

$$c_1 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75.$$

Puisque $f(1.75) = 0.171875$, on prendra l'intervalle $[1.5, 1.75]$ et ainsi de suite.

Dans cette exemple, si on veut une erreur absolue plus petite que $0.5 \times 10^{-2}$, il faut effectuer au moins

$$k_{min} > \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\mathrm{Log}\, 2} - 1 = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{2-1}{0.5\times 10^{-2}}\right)}{\mathrm{Log}\, 2} - 1 \simeq 6.643856.$$

On fera donc 7 itérations pour s'assurer de cette précision.

Le tableau suivant résume les résultats :

| $n$ | $a_n$ | $c_n$ | $b_n$ | $f(a_n)$ | $f(c_n)$ | $f(b_n)$ | $\lvert c_n - c_{n-1}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1.5 | 2 | -4 | -1.875 | 3 | |
| 1 | 1.5 | 1.75 | 2 | -1.875 | 0.171875 | 3 | 0.25 |
| 2 | 1.5 | 1.625 | 1.75 | -1.875 | -0.943359 | 0.171875 | 0.125 |
| 3 | 1.625 | 1.6875 | 1.75 | -0.943359 | -0.409423 | 0.171875 | 0.0625 |
| 4 | 1.6875 | 1.71875 | 1.75 | -0.409423 | -0.124786 | 0.171875 | 0.03125 |
| 5 | 1.71875 | 1.734375 | 1.75 | -0.124786 | 0.022029 | 0.171875 | 0.015625 |
| 6 | 1.71875 | 1.726563 | 1.734375 | -0.124786 | -0.051755 | 0.022029 | 0.007812 |
| 7 | 1.726563 | 1.730469 | 1.734375 | -0.051755 | -0.049572 | 0.022029 | 0.003906 |

■

## 5.3 Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode de recherche de racine relativement simple, pratique et largement utilisée. Il est facile de voir que si dans certains cas la méthode converge rapidement vers une racine de la fonction, dans d'autres cas, elle peut ne pas converger du tout. Cette méthode possède également une belle interprétation géométrique. Nous commençons cependant par donner une première façon d'en obtenir l'algorithme, basée sur l'utilisation du développement de Taylor.

Comme toujours, nous supposons que $f(x)$ a au moins une racine réelle et la désignons par $r$. Nous commençons par une estimation initiale de l'emplacement de la racine, disons $x_0$. À partir de cette valeur initiale $x_0$ de la solution de $f(x) = 0$, on cherche une correction $\delta x$ telle que

$$f(x_0 + \delta x) = 0.$$

En faisant un développement de Taylor autour de $x = x_0$, on trouve

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)\,\delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,(\delta x)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)\,(\delta x)^3 + \cdots .$$

Il suffit maintenant de négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\delta x$ pour obtenir

$$0 \simeq f(x_0) + f'(x_0)\,\delta x.$$

On peut alors isoler la correction recherchée

$$\delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

La correction $\delta x$ est en principe la quantité que l'on doit ajouter à $x_0$ pour annuler la fonction $f(x)$. Puisque nous avons négligé les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans le développement de Taylor, cette correction n'est pas parfaite et l'on pose

$$x_1 = x_0 + \delta x,$$

ce qui donne

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{5.1}$$

En général, la méthode de Newton (également connue sous le nom de méthode de Newton-Raphson) pour trouver une racine est donnée en itérant (5.1) à plusieurs reprises, c'est-à-dire

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

**Exemple 33**

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = e^{-x} - x = 0$. Pour utiliser la méthode de Newton, calculons la dérivée de cette fonction, qui est $f'(x) = -e^{-x} - 1$. L'algorithme se résume à

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1}.$$

Les résultats sont compilés dans le tableau suivant à partir de $x_0 = 0$.

| $n$ | $x_n$ | $\|x_n - x_{n-1}\|$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.0000000 | |
| 1 | 0.5000000 | $0.5000 \times 10^{0}$ |
| 2 | 0.5663110 | $0.6631 \times 10^{-1}$ |
| 3 | 0.5671432 | $0.8322 \times 10^{-3}$ |
| 4 | 0.5671433 | $0.1 \times 10^{-6}$ |

On remarque la convergence très rapide de cette méthode. On note également que le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. Ce phénomène est caractéristique de la méthode de Newton. ■

### 5.3.1 Interprétation géométrique

Soit $x_0$ l'estimation initiale de la solution de $f(x) = 0$ et soit $l(x)$ la droite tangente à $f(x)$ en $x_0$ qui a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

qui correspond au développement de Taylor de degré 1 autour de $x_0$.

L'intersection de $l(x)$ avec l'axe des $x$ sert comme l'estimation suivante de la racine. Nous notons ce point par $x_1$ et écrivons

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

ce qui donne

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On reprend ensuite le même raisonnement à partir de $x_1$ et ainsi de suite. Deux exemples d'itérations de la méthode sont illustrés dans la figure ci-dessous.

fig

### 5.3.2 Analyse de convergence

Il est facile de voir que la méthode de Newton ne converge pas toujours. Nous démontrons un tel cas dans la figure ci-dessous. Nous considérons ici la fonction $f(x) = \operatorname{Arctg} x$ et montrons ce qui se passe si nous partons d'un point qui est un point fixe de la méthode de Newton, itéré deux fois. Dans ce cas, $x_0 = 1.3917$ est un tel point.

fig

Afin d'analyser l'erreur dans la méthode de Newton, nous notons l'erreur dans la $n$-ième itération par

$$e_n = x_n - r.$$

On suppose que $f''(x)$ est continue et que $f'(r) \neq 0$, c'est-à-dire que $r$ est une simple racine de $f(x)$. Si la méthode de Newton converge, alors elle a un taux de convergence quadratique, c'est-à-dire,

$$e_{n+1} \approx c e_n^2.$$

En effet, nous réécrivons $e_{n+1}$ comme

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

En écrivant un développement de Taylor de $f(r)$ autour de $x = x_n$, nous avons

$$0 = f(r) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n),$$

ce qui signifie que

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n).$$

D'où

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2.$$

Par conséquent, la relation $e_{n+1} \approx c e_n^2$, est vraie avec $c = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$. Puisque nous supposons que la méthode converge, dans la limite lorsque $n \to +\infty$ nous pouvons remplacer $c = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$ par $c = \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)}$.

Revenons maintenant à la question de la convergence et montrons que pour certaines fonctions, la méthode de Newton converge quel que soit le point de départ.

**Théorème 27**

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Supposons que $f$ vérifiant

**1)** $f(a)\,f(b) < 0$.

**2)** $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. (strictement monotone)

**3)** $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. (convexe ou bien concave)

Alors

**a)** $f$ admet une racine unique $r \in [a,b]$.

**b)** la suite $(x_n)_n$ converge vers $r$ pour chaque $x_0 \in [a,b]$ vérifiant $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$. De plus, cette convergence est quadratique telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}.$$

**Démonstration.** Exercice. ■