USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Analyse numérique 1
2ème année Lic Maths

Examen final - 30 mars 2021. Durée : 1 heure

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/20

Exercice 1 (7 pts.) : Soient $\alpha \in \mathbb{R}, h > 0$ et $f \in \mathcal{C}^3([\alpha-1, \alpha+1], \mathbb{R})$.

a) Calculer $\lim_{h \to 0} f[\alpha-h, \alpha]$ et montrer qu'on a $\lim_{h \to 0} f[\alpha-h, \alpha, \alpha+h] = \frac{1}{2} f''(\alpha)$.

b) Soit p_2 le polynôme d'interpolation associé à f aux nœuds $\alpha-h, \alpha, \alpha+h$ écrit sous forme de Newton.

Déterminer alors $q(x)$ où $q(x) = \lim_{h \to 0} p_2(x)$.

c) Vérifier que q est le seul polynôme, de degré inférieur ou égal à 2, tel que

$$q(\alpha) = f(\alpha), \quad q'(\alpha) = f'(\alpha) \quad \text{et} \quad q''(\alpha) = f''(\alpha).$$

Réponse.

a) La différence divisée $f[\alpha-h, \alpha]$ est définie par

$$f[\alpha-h, \alpha] = \frac{f(\alpha) - f(\alpha-h)}{\alpha - (\alpha-h)} = \frac{f(\alpha) - f(\alpha-h)}{h}.$$

Alors

$$\lim_{h \to 0} f[\alpha-h, \alpha] = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha) - f(\alpha-h)}{h} = f'(\alpha).$$

La différence divisée $f[\alpha-h, \alpha, \alpha+h]$ est définie par

$$\begin{aligned} f[\alpha-h, \alpha, \alpha+h] &= \frac{f[\alpha, \alpha+h] - f[\alpha-h, \alpha]}{\alpha+h-(\alpha-h)} = \frac{\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - \frac{f(\alpha)-f(\alpha-h)}{h}}{2h} \\ &= \frac{f(\alpha+h) - 2f(\alpha) + f(\alpha-h)}{2h^2}. \end{aligned}$$

Effectuons un développement de Taylor d'ordre 2 de f autour de α,

$$\begin{aligned} f(\alpha+h) &= f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{2} f''(\alpha) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1), \xi_1 \in]\alpha, \alpha+h[, \\ f(\alpha-h) &= f(\alpha) - hf'(\alpha) + \frac{h^2}{2} f''(\alpha) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2), \xi_2 \in]\alpha-h, \alpha[. \end{aligned}$$

Alors $f[\alpha-h, \alpha, \alpha+h]$ s'écrit comme

$$f[\alpha-h, \alpha, \alpha+h] = \frac{1}{2} f''(\alpha) + \frac{h}{12}\left(f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)\right).$$

D'où

$$\lim_{h \to 0} f[\alpha-h, \alpha, \alpha+h] = \frac{1}{2} f''(\alpha).$$

b) Le polynôme d'interpolation p_2 associé à f aux nœuds $\alpha - h, \alpha, \alpha + h$ sous forme de Newton est donné par

$$p_2(x) = f(\alpha - h) + f[\alpha - h, \alpha](x - (\alpha - h)) + f[\alpha - h, \alpha, \alpha + h](x - (\alpha - h))(x - \alpha).$$

Alors

$$q(x) = \lim_{h \to 0} p_2(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)(x - \alpha)^2,$$

qui est un polynôme de degré 2.

c) On a

$$q'(x) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(x - \alpha) \quad \text{et} \quad q''(x) = f''(\alpha).$$

On remarque le polynôme q vérifie

$$q(\alpha) = f(\alpha), \quad q'(\alpha) = f'(\alpha) \quad \text{et} \quad q''(\alpha) = f''(\alpha).$$

Le polynôme q est unique car il s'agit du polynôme de Taylor du second ordre de f autour de α.

Exercice 2 (7 pts.) : On recherche une approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$, dont on ne connaît pas la primitive.

a) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode du trapèze sur 4 sous-intervalles ($n = 4$) et en utilisant 9 chiffres significatifs avec arrondi.

b) Indiquer le terme d'erreur que l'on fait par cette méthode de trapèze.

c) Déterminer alors le nombre d'intervalles minimal nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode du trapèze avec une erreur de 10^{-4}.

d) Refaire les mêmes questions pour la méthode de Simpson. (*Indication* $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{d^4}{dx^4}e^{-x^2}\right| = 12$).

Réponse.

On a $a = 0, b = 1, n = 4, h = \dfrac{b-a}{n} = \frac{1}{4}, x_i = \frac{i}{4}, i = 0, ..., 4$ et $f(x) = e^{-x^2}$.

On obtient alors le tableau de données suivantes

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$y_i = f(x_i) = e^{-x_i^2}$	1	$e^{-\frac{1}{16}}$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$e^{-\frac{9}{16}}$	e^{-1}

a) L'approximation de l'intégrale I par la méthode des trapèzes est

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right).$$

Pour $n = 4$, on obtient

$$T_4(f) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(b)\right) = \frac{\frac{1}{4}}{2}\left(1 + 2\left(e^{-\frac{1}{16}} + e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{9}{16}}\right) + e^{-1}\right) \simeq 0.742\,984\,098\ .$$

b) L'erreur théorique commise par la méthode des trapèzes est donnée par

$$|E_T(h)| \leq \frac{b-a}{12}h^2 \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{h^2}{12} \sup_{x\in[0,1]} \left|2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}\right|.$$

On a $f'''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}\right) = -4x\left(2x^2-3\right)e^{-x^2} = 0$ sur $[0,1]$ implique $x = 0$. Alors

$$\sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}\right| = \max\left(|f''(0)|, |f''(1)|\right) = \max\left(|-2|, \left|\frac{2}{e}\right|\right) = 2.$$

D'où

$$|E_T(h)| \leq \frac{h^2}{6}.$$

c) Pour avoir une erreur inférieure à $\varepsilon > 0$, il suffit donc que

$$\frac{h^2}{6} \leq \varepsilon$$

ce qui est équivalent à

$$n = \frac{1}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}}.$$

Pour $\varepsilon = 10^{-4}$, on obtient

$$n \geq \frac{1}{\sqrt{6 \times 10^{-4}}} \simeq 40.82 \ .$$

Puisque n est entier, on choisit $n = 41$.

d) L'approximation de l'intégrale I par la méthode de Simpson est

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i \text{ pair}} f(x_i) + 4\sum_{i \text{ impair}} f(x_i)\right).$$

Pour $n = 4$, on obtient

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \frac{h}{3}\left(f(0) + f(1) + 2f\left(\tfrac{1}{2}\right) + 4f\left(\tfrac{1}{4}\right) + 4f\left(\tfrac{3}{4}\right)\right) \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left(1 + e^{-1} + 2e^{-\frac{1}{4}} + 4e^{-\frac{1}{16}} + 4e^{-\frac{9}{16}}\right) \\ &\simeq 0.746\,855\,380 \ . \end{aligned}$$

L'erreur théorique commise par la méthode de Simpson est donnée par

$$|E_S(h)| \leq \frac{b-a}{2880} h^4 \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{h^4}{2880} \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{h^4}{2880} \times 12 = \frac{h^4}{240}.$$

Pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4}, il suffit que

$$\frac{h^4}{240} \leq 10^{-4}$$

ce qui est équivalent à

$$n = \frac{1}{h} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{240 \times 10^{-4}}} \simeq 2.54.$$

Puisque n est un entier pair, on choisit $n = 4$.

Exercice 3 (6 pts.) : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = -3$.

a) 1. Sachant que $f(0.3131421438) = 0$, déterminer la suite des premiers quatre étirés de la méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[0,1]$ pour l'approximation du zéro de f.

On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

n	a_n	c_n	b_n	signe $f(a_n)$	signe $f(c_n)$	signe $f(b_n)$
0						
1						
2						
3						
4						

2. Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-5} près ?

b) Considérons l'équation $e^x = x(3 + e^x)$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle r dans $[0,1]$.
2. Écrire la méthode de Newton pour approcher la solution r.
3. Effectuer quatre itérations avec la méthode de Newton en démarrant de $x_0 = 0.5$ et en utilisant 9 chiffres significatifs avec arrondi.

Réponse.

a)

1. On a

n	a_n	c_n	b_n	signe $f(a_n)$	signe $f(c_n)$	signe $f(b_n)$
0	0	0.5	1	$+$	$-$	$-$
1	0	0.25	0.5	$+$	$+$	$-$
2	0.25	0.375	0.5	$+$	$-$	$-$
3	0.25	0.3125	0.375	$+$	$+$	$-$
4	0.3125	0.34375	0.375	$+$	$-$	$-$

donc, après quatre itérations, le zéro de f est approché par 0.34375.

2. Il faut effectuer au moins $N = \left[\frac{\operatorname{Log} \frac{1-0}{2^{-5}}}{\operatorname{Log} 2} \right] = 5$ itérations.

b)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - x(3 + e^x)$. Alors $f(x) = 0$ si et seulement si x est solution de l'équation donnée. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -3 < 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, la fonction f admet au moins une racine $r \in [0,1]$. De plus, f est strictement monotone sur $[0,1]$ car $f'(x) = -xe^x - 3 < 0$ pour tout $x \in [0,1]$, donc cette racine est unique.
2. La méthode de Newton est

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1], \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - x_n(3 + e^{x_n})}{-x_n e^{x_n} - 3} = (x_n^2 - x_n + 1)\dfrac{e^{x_n}}{x_n e^{x_n} + 3}. \end{cases}$$

3. En utilisant l'algorithme de Newton on obtient le tableau suivant

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.5	0.323332727	0.313169525	0.313142144	0.313142144