Chapitre 2

Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

2-1 Introduction

On s'intéresse à la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

que l'on peut mettre sous la forme $Ax = b$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$ et x un vecteur inconnu de $\mathbb{K}^n$.

On supposera que le système admet une solution unique, ce qui est équivalent à A est inversible. La solution du système peut donc s'obtenir en calculant A^{-1} puis $A^{-1}b$, mais calculer A^{-1} nécessite la résolution de n systèmes linéaires d'ordre n :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \delta_{ij} \text{ pour tout } i, j \text{ où } (c_{ij}) = A^{-1}.$$

On essaie donc, par des opérations élémentaires de se ramener à un système triangulaire :

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + & \tilde{a}_{12}x_2 + & \cdots + & \tilde{a}_{1n}x_n = & \tilde{b}_1 \\ & \tilde{a}_{22}x_2 + & \cdots + & \tilde{a}_{2n}x_n = & \tilde{b}_2 \\ & & & \vdots & \\ & & & \tilde{a}_{nn}x_n = & \tilde{b}_n \end{cases} \quad \text{avec } \prod_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kk} \neq 0$$

que l'on résout par la méthode de remontée

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_{nn}} \\ x_{n-1} = \dfrac{\tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{n-1,n}x_n}{\tilde{a}_{n-1,n-1}} \\ \vdots \\ x_1 = \dfrac{\tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1,n}x_n - \cdots - \tilde{a}_{12}x_2}{\tilde{a}_{11}} \end{cases}.$$

2-2 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss est une méthode générale de résolution d'un système linéaire $Ax = b$ avec A inversible. La méthode procède en deux étapes :

$\boxed{1}$ procédure d'éliminations successives des inconnues qui revient à déterminer une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire supérieure et calcul simultané de Mb,

$\boxed{2}$ résolution du système $MAx = Mb$ par la méthode de remontée.

2-2.1) Exemple introductif

Soit le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & 2x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ - & 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 7x_4 & = & -9 \\ & 4x_1 & + & 1x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \\ & 0x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & - & 1x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

que l'on peut écrire sous forme vectorielle $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

On appellera aussi A_1 la matrice A et b_1 le vecteur b.

On cherche à éliminer x_1 dans les équations 2, 3 et 4. Pour cela, on multiplie la première équation par 2 et on l'ajoute à la deuxième équation qui devient :

$$0x_1 \ + \ 0x_2 \ + \ 3x_3 \ + \ 1x_4 \ = \ -5$$

De même, on multiplie la première équation par -2 et on l'ajoute à la troisième équation pour obtenir :

$$0x_1 \ - \ 1x_2 \ - \ 2x_3 \ + \ 0x_4 \ = \ -2 \ .$$

Étant donné que x_1 n'intervient pas dans la quatrième équation, puisque son coefficient est nul, on ne modifie pas la quatrième équation.

À la fin de cette étape - l'élimination de x_1 - on obtient le système équivalent $A_2x = b_2$, avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour éliminer x_2 dans les équations 3 et 4, il est impossible d'utiliser la deuxième équation, puisque le coefficient de x_2, que l'on appelle le pivot, y est nul. Par contre, on peut utiliser l'une des deux dernières équations. On choisit par exemple la troisième et, dans ce cas, c'est le coefficient -1 qui joue le rôle du pivot.

Puisque le coefficient de x_2 dans la deuxième équation est nul, x_2 est déjà éliminé de cette équation. On multiplie maintenant la troisième équation par -3 et on l'ajoute à la quatrième qui devient :

$$0x_2 \ - \ 6x_3 \ - \ 1x_4 \ = \ 8 \ .$$

Si l'on permute les équations 2 et 3, on obtient le système linéaire équivalent : $A_3x = b_3$, avec

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer x_3 dans la dernière équation. Comme le coefficient de x_3 dans la troisième équation est non nul (il est égal à 3), on le choisit comme pivot. On multiplie alors la troisième équation par 2 et on l'ajoute à la quatrième pour obtenir :

$$0x_3 \quad + \quad 1x_4 \quad = \quad -2 \ .$$

Le système d'équations linéaires équivalent obtenu finalement est $A_4x = b_4$, où

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_4 est triangulaire supérieure. Pour obtenir la solution du système $A_4x = b_4$, on résout les équations "en remontant" dans l'ordre 4, 3, 2, 1, ce qui permet de calculer successivement les inconnues dans cet ordre.

La dernière équation est $x_4 = -2$.
La troisième équation $3x_3 + x_4 = -5$ donne alors $x_3 = -1$.
La deuxième équation $-x_2 - 2x_3 = -2$ donne $x_2 = 2 - 2x_3 = 4$.
Enfin, la première équation $2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2$ donne $x_1 = \dfrac{1}{2}(2 - x_2 - 4x_4) = 3$.

On obtient ainsi la solution $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(On peut vérifier que le vecteur résidu $r = b - A\bar{x}$ est bien nul, comme il se doit.)

On peut maintenant donner une écriture matricielle aux opérations d'élimination qui ont été effectuées.

La transformation consistant à multiplier la première composante b_1 d'un vecteur b par un nombre α et à l'ajouter à sa deuxième composante b_2 se traduit par la multiplication à gauche de ce vecteur b par la matrice E_1 où :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, $E_1b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \alpha b_1 + b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

De même, multiplier b_1 par β et l'ajouter à b_3 revient à multiplier le vecteur b par la matrice E_2 où :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, $E_2 b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \beta b_1 + b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

Effectuer les deux transformations successivement (on remarque que l'ordre dans lequel on les effectue n'a pas d'importance) revient donc à multiplier le vecteur b par :

$$M_1 = E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les transformations précédentes sont inversibles et :

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui traduit le fait que, si l'on a ajouté αb_1 à b_2 pour obtenir $\alpha b_1 + b_2$, il faut maintenant lui retrancher αb_1 pour obtenir b_2.

On a $M_1^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Appelons L_1 cette matrice.

À partir du système d'équations $A_1 x = b_1$ et en choisissant $\alpha = 2$ et $\beta = -2$, on a obtenu le système $A_2 x = b_2$ avec $A_2 = M_1 A_1$ et $b_2 = M_1 b_1$. On en déduit donc les relations

$$A_1 = L_1 A_2 \quad \text{et} \quad b_1 = L_1 b_2.$$

À la deuxième étape, on a effectué une permutation des lignes 2 et 3 pour obtenir un pivot non nul. Cela se traduit par la multiplication par la matrice élémentaire de permutation P où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, on a éliminé x_2, ce qui se traduit par la multiplication par la matrice M_2 où :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système obtenu est $A_3 x = b_3$, avec $A_3 = M_2 P A_2$ et $b_3 = M_2 P b_2$.
On en déduit alors $P A_2 = L_2 A_3$ et $P b_2 = L_2 b_3$.

Finalement, la dernière étape a conduit au système $A_4 x = b_4$ où $A_4 x = b_4$ où $A_4 = M_3 A_3$ et $b_4 = M_3 b_3$, soit encore $A_3 = L_3 A_4$ et $b_3 = L_3 b_4$, avec :

$$L_3 = M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $A_4 = U$ et $b_4 = c$, on aboutit finalement au système équivalent :

$$Ux = c.$$

Posons $L'_1 = PL_1\,{}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha = 2$ et $\beta = -2$, et $L = L'_1 L_2 L_3$. Un calcul simple donne :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que, pour obtenir L, il suffirait de recopier à leurs places dans L les coefficients sous la diagonale des matrices L'_1, L_2 et L_3.

Calculons le produit LU ; on a :

$$LU = L'_1 L_2 (L_3 A_4) = L'_1 (L_2 A_3) = (L'_1 P) A_2 = P(L_1 A_2) = PA_1 = PA.$$

On a ainsi obtenu la factorisation de la matrice PA en le produit de matrices triangulaires L et U, l'une inférieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1, l'autre supérieure.

(On peut vérifier aisément que le produit $LU = LA_4$ redonne bien la matrice A dont les lignes 2 et 3 ont été permutées.)

Le calcul de P, L et U peut se faire indépendamment du second membre b. Ensuite, pour résoudre le système $Ax = b$, on résoudra $Pb = PAx = LUx$ grâce aux deux systèmes triangulaires $Ly = Pb$, puis $Ux = y$. (On peut vérifier que la solution du système $Ly = Pb$ est le vecteur $c = b_4$.)

2-2.2) Méthode générale

Étape 1 : Premières éliminations

• A est inversible donc il existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $a_{i_0,1} \neq 0$. On choisit un de ces nombres et on l'appelle *pivot de l'élimination*.

• On échange la ligne du pivot (ligne i_0) et la première ligne. Cette opération est équivalente à effectuer le produit $P_1 A$ où P_1 est la *matrice de permutation* : $P_1 = \begin{cases} T(i_0, 1) & \text{si } i_0 \neq 1 \\ I_n & \text{si } i_0 = 1 \end{cases}$
avec, plus généralement, pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$T(i,j) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & (0) & & & (0) \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \\ & 0 & 1 & & (0) & 0 & \\ (0) & \vdots & & \ddots & & \vdots & (0) \\ & 0 & (0) & & 1 & \vdots & \\ & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ (0) & & & (0) & & & I_{n-j} \end{pmatrix}$$

On note $P_1A = \left(\tilde{a}_{ij}^{(1)}\right)$ (matrice obtenue en permutant les lignes 1 et i_0 de A) avec $\tilde{a}_{11}^{(1)} \neq 0$.

- On élimine tous les $\tilde{a}_{i,1}^{(1)}$ pour $i \in \{2, \cdots, n\}$.

Notons

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ -\tilde{a}_{21}^{(1)}/\tilde{a}_{11}^{(1)} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\tilde{a}_{n,1}^{(1)}/\tilde{a}_{11}^{(1)} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$E_1P_1A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

où pour $i, j \in \{2, \cdots, n\}$, $a_{ij}^{(2)} = -\dfrac{\tilde{a}_{i,1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \times \tilde{a}_{1,j}^{(1)} + \tilde{a}_{ij}^{(1)}$ et pour $i \in \{2, \cdots, n\}$, $-\dfrac{\tilde{a}_{i,1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \times \tilde{a}_{11}^{(1)} + \tilde{a}_{i,1}^{(1)} = 0$.

Comme $\det(E_1) = 1$, $\det(E_1P_1A) = \pm\det(A) \neq 0$ (car $\det T(i,j) = -1$ et $\det(I_n) = 1$), donc E_1P_1 et E_1P_1A sont inversibles.

Étape 2 : Deuxièmes éliminations

$\det \begin{pmatrix} a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \neq 0$ donc il existe $i_0 \in \{2, \cdots, n\}$ tel que $a_{i_0,2}^{(2)} \neq 0$ et on peut trouver $\tilde{E}_2$ et $\tilde{P}_2$ (matrice de permutation) telles que $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_2 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 \end{pmatrix}$.

$$E_2P_2E_1P_1A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \tilde{a}_{13}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(2)} & \tilde{a}_{23}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(3)} & \cdots & a_{n,n}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Étape $k-1$:

$$E_{k-1}P_{k-1}\cdots E_1P_1A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{1,k-1}^{(1)} & \tilde{a}_{1,k}^{(1)} & \tilde{a}_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,k-1}^{(2)} & \tilde{a}_{2,k}^{(2)} & \tilde{a}_{2,k+1}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \tilde{a}_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \tilde{a}_{k-1,k}^{(k-1)} & \tilde{a}_{k-1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{k-1,n}^{(k-1)} \\ & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,k}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Théorème 4 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Il existe au moins une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire supérieure.

Remarque sur le choix du pivot : Pour éviter les erreurs d'arrondis, on peut utiliser, pour le choix du pivot,

$\rightarrow$ la stratégie du pivot partiel : à chaque étape k, on choisit $\tilde{a}_{i,k}^{(k)} = \max\limits_{k \le j \le n} |\tilde{a}_{jk}^{(k)}|$;

$\rightarrow$ la stratégie du pivot total : à chaque étape k, on choisit pour pivot $\tilde{a}_{i,j}^{(k)} = \max\limits_{k \le \ell, \ell' \le n} |\tilde{a}_{\ell,\ell'}^{(k)}|$.
Si le pivot choisi n'est pas sur la k-ième ligne, il faut aussi effectuer une permutation des colonnes.

2-3 Factorisation LU

2-3.1) Factorisation dans un cas particulier

On reprend les notations du pivot de Gauss.
$\rightarrow$ Existence de la décomposition LU
Si

$$\begin{array}{l} a_{11} \neq 0, \text{ alors } P_1 = I_n \\ \tilde{a}_{22}^{(2)} \neq 0, \text{ alors } P_2 = I_n \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0, \text{ alors } P_{n-1} = I_n \end{array}$$

Dans ce cas, la matrice de transformation du pivot de Gauss est $M = E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_2E_1$ qui est triangulaire inférieure, et MA est triangulaire supérieure.

Posons alors $L = M^{-1}$ et $U = MA$. Alors, on a :
• U est triangulaire supérieure (par construction) ;
• L est triangulaire inférieure : en effet, en notant $L = (\ell_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ avec $m_{i,j} = 0$ si $i < j$ (car M est triangulaire inférieure), on a

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & \ell_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} = I_n$$

qui équivaut à :

$$\begin{array}{l} \text{pour } k = 1, \cdots, n-1, \ \ell_{k,n} m_{n,n} = 0 \text{ donc } \ell_{k,n} = 0 \\ \text{pour } k = 1, \cdots, n-2, \ \ell_{k,n-1} m_{n-1,n-1} = 0 \text{ donc } \ell_{k,n-1} = 0 \\ \vdots \\ \text{pour } k = 1, \ \ell_{1,2} m_{22} = 0 \text{ donc } \ell_{1,2} = 0 \end{array}$$

et donc, finalement, $\ell_{ij} = 0$ dès que $i < j$, ce qui prouve bien que L est triangulaire inférieure et

$$A = LU$$

avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

→ Calcul de la matrice L

La matrice L est : $L = (E_{n-1} \dots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{n-1}^{-1}$, avec

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & e_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & e_{n-1,k} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $e_{j,k} = -\dfrac{\tilde{a}_{j,k}^{(k)}}{\tilde{a}_{k,k}^{(k)}}$ pour tout $j = k+1, \dots, n$.

Montrons que l'inverse de E_k est la matrice

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ (0) & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dots 0 & -e_{k+1,k} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots 0 & -e_{n,k} & (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, notons $E_k = (e_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ et $L_k = (\ell_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$; alors,

$$\begin{aligned} (E_k L_k)_{i,j} &= \sum_{h=1}^{n} e_{i,h} \ell_{h,j} \\ &= \begin{cases} 1 \times \ell_{i,j} = \delta_{i,j} & \text{si } i \leq k, \\ e_{i,k} \times \ell_{k,j} + 1 \times \ell_{i,j} = (*) & \text{si } i \geq k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{array}{ll} \text{si } j = k, & (*) = e_{i,k} \times 1 + (-e_{i,k}) = 0 = \delta_{i,j} \\ \text{si } j = i, & (*) = e_{i,k} \times 0 + 1 = 1 = \delta_{i,j} \\ \text{si } j \neq i,k, & (*) = e_{i,k} \times 0 + 0 = \delta_{i,j}, \end{array}$$

et donc, finalement, pour tous $i, j = 1, \dots, n$, $(E_k L_k)_{i,j} = \delta_{i,j}$, ce qui prouve bien que $E_k L_k = I_n$ et donc que L_k est l'inverse de E_k.

Ainsi, on peut calculer $L = L_1 L_2 \dots L_{n-1}$:

$$L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ -e_{n,1} & (0) & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -e_{3,2} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -e_{n,2} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice dont le terme (i,j) est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_{i,k}^{(1)}\ell_{k,j}^{(2)} = \begin{cases} 1 \times \ell_{1,j}^{(2)} = \delta_{1,j} & \text{si } i = 1 \\ l_{i,1}^{(1)} \times \ell_{1,j}^{(2)} + \ell_{i,i}^{(1)} \times \ell_{i,j}^{(2)} = (*) & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

Or,

$$\begin{array}{ll} \text{si } j = i, & (*) = -e_{i,1} \times 0 + 1 \times 1 = 1 = \delta_{i,j} \\ \text{si } j = 2, & (*) = -e_{i,1} \times 0 + 1 \times (-e_{i,2}) = -e_{i,2} \\ \text{si } j \neq i, 2, & (*) = -e_{i,1} \times \delta_{i,1} + 1 \times 0 = -e_{i,1} \times \delta_{i,1}, \end{array}$$

et donc

$$L_1L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{3,1} & -e_{3,2} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -e_{n,1} & -e_{n,2} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en répétant le processus,

$$L_1L_2\dots L_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{3,1} & -e_{3,2} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -e_{n,1} & -e_{n,2} & -e_{n,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (-e_{ij})_{i>j} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice Trouver la décomposition LU de A par application de la méthode de Gauss à

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } E_1A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 18/5 & 9/5 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9/20 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } E_2E_1A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = U.$$

Par ailleurs $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9/20 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4/5 & -9/20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 5 : Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que les n matrices $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$ (pour $k = 1,\dots,n$) soient inversibles. Alors, il existe L, matrice triangulaire inférieure, et U, matrice triangulaire supérieure, telles que $A = LU$. De plus, cette factorisation est unique à une matrice diagonale près.

Preuve : $\rightarrow$<u>Existence</u> Montrons, par récurrence sur $k = 1, \ldots, n-1$ que (HRk) : $\tilde{a}_{k,k}^{(k)} \neq 0$:

- pour $k = 1$, (HR1) est vérifiée car $a_{1,1} = \det \Delta_1 \neq 0$ par hypothèse ;
- supposons l'hypothèse (HRj) vérifiée pour tout $j \leq k-1$ pour un certain $k \leq n-1$. Alors, cela signifie que, pour tout $j = 1, \ldots, k-1$, $P_j = I_n$ et donc que la méthode de Gauss a donné :

$$E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1}^{(1)} & \tilde{a}_{1,2}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,k}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,k}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

En faisant le produit par blocs des matrices $E_{k-1} \cdots E_1$ et A et en regardant le bloc $k \times k$ supérieur gauche, il vient :

$$[E_{k-1} \ldots E_2 E_1]_{k \times k} \times \Delta_k = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1}^{(1)} & \tilde{a}_{1,2}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,k}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,k}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ce qui, en prenant le déterminant donne : $1 \times \det \Delta_k = \prod_{i=1}^{k-1} \tilde{a}_{i,i}^{(i)} \times a_{k,k}^{(k)}$. Comme, $\det \Delta_k \neq 0$, on conclut que $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ ce qui finit la preuve de la récurrence.

Ainsi, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\tilde{a}_{k,k}^{(k)} \neq 0$ ce qui prouve qu'on peut effectuer la méthode de Gauss pour déterminer la factorisation LU de A.

$\rightarrow$ <u>Unicité :</u> Supposons qu'il existe deux décompositions LU de A : $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ avec L_i ($i = 1, 2$) triangulaire inférieure, et U_i ($i = 1, 2$), triangulaire supérieure. Alors,

$$\begin{aligned} L_1 U_1 = L_2 U_2 \quad &\Leftrightarrow \quad U_1 = L_1^{-1} L_2 U_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{U_1 U_2^{-1}}_{\text{triangulaire supérieure}} = \underbrace{L_1^{-1} L_2}_{\text{triangulaire inférieure}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $U_1 U_2^{-1}$ et $L_1^{-1} L_2$ sont des matrices diagonales et conclut donc la preuve du Théorème 5.

$\square$

<u>Conséquence :</u> Résolution d'un système linéaire.

Si on connait la décomposition LU de A, on résout le système $Ax = b$ par :

1) résolution de $L\tilde{x} = b$;

2) résolution de $Ux = \tilde{x}$.

2-3.2) Factorisation LU d'une matrice tridiagonale

Théorème 6 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale et soit la suite

$$\delta_0 = 1, \qquad \delta_1 = b_1, \qquad \text{et, pour } k = 2, \ldots, n, \ \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}$$

Alors,

1. Pour $k = 1, \ldots, n$, $\delta_k = \det \Delta_k$;
2. Si pour $k = 1, \ldots, n$, $\delta_k \neq 0$, la décomposition LU de A est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 \dfrac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_3 \dfrac{\delta_1}{\delta_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dfrac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Preuve :

1. En développant suivant la dernière ligne, $\det \Delta_k = b_k \det \Delta_{k-1} - a_k \det \tilde{\Delta}_{k-1}$ où

$$\tilde{\Delta}_{k-1} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & c_{k-1} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det \tilde{\Delta}_{k-1} = c_{k-1} \det \Delta_{k-2}.$$

Ainsi, par récurrence sur $k = 1, \ldots, n$, on montre la propriété (HR_k) : $\delta_k = \det \Delta_k$:

- $\delta_1 = b_1 = \det \Delta_1$ et $\delta_2 = b_2 b_1 - a_2 c_1 = \det \Delta_2$;
- Supposons que (HR_{k-1}) et (HR_{k-2}) soient vérifiées pour un $k \geq 3$. Alors, $\delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2} = b_k \det \Delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \det \Delta_{k-2} = \det \Delta_k$ par la remarque préliminaire.

Par le principe de récurrence, la première partie du théorème est démontrée.

2. Calculons, pour les matrices L et U proposées, le produit LU : $(LU)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} L_{i,k} U_{k,j}$

- Pour $i = 1$, $(LU)_{1,j} = U_{1,j}$ donc $(LU)_{1,1} = \dfrac{\delta_1}{\delta_0} = b_1$, $(LU)_{1,2} = U_{1,2} = c_1$ et pour $j \geq 3$, $(LU)_{1,j} = U_{1,j} = 0$

- Pour $2 \leq i \leq n-1$, $(LU)_{i,j} = L_{i,i-1}U_{i-1,j} + U_{i,j}$ donc $(LU)_{i,i-1} = a_i \dfrac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}} \times \dfrac{\delta_{i-1}}{\delta_{i-2}} + 0 = a_i$; $(LU)_{i,i} = a_i \dfrac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}} \times c_{i-1} + \dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \dfrac{b_i \delta_{i-1}}{\delta_{i-1}} = b_i$; $(LU)_{i,i+1} = U_{i,i+1} = c_i$ et $(LU)_{i,j} = 0$ si $j < i-1$ ou $j > i+1$
- Pour $i = n$, $(LU)_{n,k} = L_{n,n-1}U_{n-1,k} + U_{n,k}$ donc $(LU)_{n,n-1} = a_n \dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} \times \dfrac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} + 0 = a_n$; $(LU)_{n,n} = a_n \dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} \times c_{n-1} + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = \dfrac{b_n \delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} = b_n$ et $(LU)_{n,k} = 0$ pour $k < n-1$.

Ainsi, $LU = A$.

$\square$

Conséquence : Résolution d'un système linéaire

Pour résoudre le système linéaire $Ax = d$ où A est tridiagonale, on construit les suites suivantes :

$$\begin{cases} \text{pour } k = 1, \ldots, n, \ z_k = c_k \dfrac{\delta_{k-1}}{\delta_k} \\ w_1 = \dfrac{d_1}{b_1} \text{ et pour } k = 2, \ldots, n, \ w_k = \dfrac{d_k - a_k w_{k-1}}{b_k - a_k z_{k-1}} \\ x_n = w_n \text{ et pour } k = 1, \ldots, n-1, x_k = w_k - z_k x_{k+1} \end{cases}$$

.

Idée : On procède par la méthode de remontée deux fois : $(L\Delta)w = d$ avec $\Delta = \text{Diag}\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_0}, \ldots, \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)$ puis $(\Delta^{-1}U)x = w$.

2-4 Méthode de Choleski

On s'intéresse au cas particulier où A est symétrique définie positive.

Théorème 7 : Si A est symétrique définie positive alors, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure telle que $A = B\,{}^tB$.

De plus, si on impose que les éléments diagonaux de B soient positifs, alors la factorisation est unique.

Preuve : $\rightarrow$ Existence Montrons tout d'abord que, pour $k = 1, \ldots, n$, $\det(\Delta_k) > 0$: en effet, soit $w = {}^t(w_1, \ldots, w_k) \in \mathbb{R}^k$; on pose $v = {}^t(w\ 0 \ldots 0) \in \mathbb{R}^n$. Alors, ${}^tw\Delta_k w = {}^tvAv > 0$ (car A est définie positive et si $w \neq 0$, alors $v \neq 0$). Ainsi, par le Théorème 5, il existe

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ \ell_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

où pour $k = 1, \ldots, n$, $u_{kk} > 0$, telles que $A = LU$. Soit alors $\Sigma = \text{diag}\left(\sqrt{u_{11}}, \ldots, \sqrt{u_{nn}}\right)$; on a $A = (L\Sigma)(\Sigma^{-1}U)$ ce qui donne $A = BC$ avec

$$B = L\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ \sqrt{u_{11}}\ell_{n,1} & \cdots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \Sigma^{-1}U = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & \cdots & u_{1,n}/\sqrt{u_{11}} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, A est symétrique donc

$$\begin{aligned} {}^tA = A \quad &\Leftrightarrow \quad {}^tC\,{}^tB = BC \\ &\Leftrightarrow \quad B^{-1}\,{}^tC = C({}^tB)^{-1} \end{aligned}$$

Or,

$$B^{-1}\,{}^tC = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C({}^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve donc que $B^{-1}\,{}^tC = C({}^tB)^{-1} = I_n$. Ainsi, $C = {}^tB$ et $A = B\,{}^tB$ avec B triangulaire inférieure.

→ <u>Unicité</u> : Supposons que $A = B_1\,{}^tB_1 = B_2\,{}^tB_2$ avec B_i $(i = 1, 2)$ triangulaires inférieures à éléments diagonaux positifs. Par unicité de la décomposition LU (à matrice diagonale près), il existe une matrice diagonale Λ telle que $B_1 = B_2\Lambda$, ce qui implique $B_2\,{}^tB_2 = B_1\,{}^tB_1 = B_2\Lambda\Lambda\,{}^tB_2$ et donc $\Lambda^2 = I_n$. Ainsi, $\Lambda = \mathrm{diag}(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1)$.

Or, pour $k = 1, \ldots, n$, $(B_1)_{kk} = (B_2)_{kk} \times \Lambda_{kk}$ et $(B_1)_{kk}$ et $(B_2)_{kk}$ sont strictement positifs donc $\Lambda_{kk} = 1$ et finalement, $\Lambda = I_n$ ce qui permet de conclure que $B_1 = B_2$.

□

De manière pratique, on pose, *a priori*, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$.

La relation $A = B\,{}^tB = \begin{pmatrix} b_{11} & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n,1} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & b_{n,n} \end{pmatrix}$ implique :

$b_{11}^2 = a_{11}$ donc $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$:

$b_{21} \times b_{11} = a_{12}$ donc $b_{21} = \dfrac{a_{12}}{b_{11}}$;

Pour $i = 3, \cdots, n$, $b_{i,1} \times b_{11} = a_{1,i}$ donc $b_{i,1} = \dfrac{a_{1,i}}{b_{1,1}}$;

$b_{21}^2 + b_{22}^2 = a_{22}$ donc $b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}$;

Pour $i = 3, \cdots, n$, $b_{21} \times b_{i,1} + b_{22} \times b_{i,2} = a_{2,i}$ donc $b_{i,2} = \dfrac{a_{2,i} - b_{21} \times b_{i,1}}{b_{22}}$;

$\vdots$

Pour $j = 3, \cdots, n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2 + b_{jj}^2 = a_{jj}$ donc $b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}$

Pour $i = j+1, \cdots, n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{j} b_{jk}b_{ik} = a_{ji}$ donc $b_{ij} = \dfrac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}b_{ik}}{b_{jj}}$.

<u>Application :</u>

• Méthode de Choleski pour la résolution du système $Ax = b$, avec A définie positive et symétrique :

1) On détermine B telle que $A = B\,{}^tB$ et pour $k = 1, \cdots, n$, $B_{kk} > 0$;

2) On résout les systèmes $By = b$ puis ${}^tBx = y$.

• Méthode de Choleski pour le calcul de $\det A$ avec A symétrique et définie positive :

$$\det(A) = (\det B)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n} b_{kk}\right)^2 .$$

2-5 Factorisation QR et méthode de Househölder

Définition : On appelle *matrice de Househölder* une matrice qui a la forme $H(v) = I_n - 2\dfrac{v\,v^*}{v^*\,v}$ où $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Remarque : Par convention, I_n est une matrice de Househölder.

Propriété : $H(v)$ est hermitienne et unitaire.

Preuve : $[H(v)]^* = \left[I_n - 2\dfrac{v\,v^*}{v^*\,v}\right]^* = I_n^* - 2\dfrac{v^{**}\,v^*}{v^*\,v} = I_n - 2\dfrac{v\,v^*}{v^*\,v} = H(v)$.
Montrons que $H(v)$ est unitaire.

$$[H(v)]^*H(v) = H(v)H(v) = \left(I_n - 2\frac{v\,v^*}{v^*\,v}\right)\left(I_n - 2\frac{v\,v^*}{v^*\,v}\right) = I_n - 4\frac{v\,v^*}{v^*\,v} + 4\frac{vv^*vv^*}{(v^*v)^2} = I_n$$

□

Théorème 8 : Soit $a = {}^t(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_i| > 0$. Alors, il existe deux matrices de Householder H_1 et H_2 telles que $H_i a$ $(i = 1, 2)$ soit de la forme ${}^t(*, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1})$.

De manière plus précise, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\alpha}|a_1| = a_1$; on a :
• si $H_1 = H(a + \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)$, $H_1 a = -\|a\|_2 e^{i\alpha} e_1$
• si $H_2 = H(a - \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)$, $H_2 a = \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1$.
où e_1 est le premier vecteur de la base canonique.

Preuve :
Comme $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_i| > 0$, $a \pm \| a \|_2 \, e^{i\alpha} e_1 = {}^t(a_1 \pm \|a\|_2 e^{i\alpha}, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. On peut donc définir H_1 et H_2 comme dans l'énoncé du Théorème 8. Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2\}$,

$$H_i a = \left[I_n - 2\frac{(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(a \pm \|a\|_2\, e^{i\alpha} e_1)^*}{(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)^*(a \pm \|a\|_2\, e^{i\alpha} e_1)}\right] a,$$

où α vérifie $e^{i\alpha}|a_1| = a_1$. Or,

$$\begin{aligned}(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)^* a &= (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(\|a\|_2^2 \pm \|a\|_2 e^{-i\alpha} a_1) \qquad \text{car } (e^{i\alpha})^* = e^{-i\alpha} \\ &= \|a\|_2 (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha} a_1)\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)^*(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1) &= \|a\|_2^2 \pm \|a\|_2 (e^{-i\alpha} a_1 + e^{i\alpha} \bar{a_1}) + \|a\|_2^2 \qquad \text{car } e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = 1 \\ &= \|a\|_2^2 \pm 2\|a\|_2 e^{-i\alpha} a_1 + \|a\|_2^2 \qquad \text{car } a_1 e^{-i\alpha} = \bar{a_1} e^{i\alpha} = |a_1| \\ &= 2\|a\|_2 (\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha} a_1)\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} H_i a &= \left[a - 2\frac{\|a\|_2(\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha}a_1)(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha}e_1)}{2\|a\|_2(\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha}a_1)}\right] \\ &= a - (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha}e_1) = \mp\|a\|_2 e^{i\alpha}e_1 \end{aligned}$$

□

Application du Théorème 8 à la réduction de Househölder d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
→ 1$^{\text{ère}}$ étape On pose $a_1 = {}^t(a_{11}, \dots, a_{n1})$ (la première colonne de la matrice A). Deux cas se présentent :

- Si $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_{i1}| = 0$, alors, on pose $H_1 = I_n$;
- Si $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_{i1}| > 0$, alors, on pose $H_1 = H(a_1 - \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1}e_1)$ où α_1 vérifie $e^{i\alpha_1}|a_{11}| = a_{11}$. Dans ce cas, on a

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

→ Étape k $(k \leq n-1)$ On suppose qu'on a obtenu $k-1$ matrice de Househölder (éventuellement égales à l'identité), $H_1, \dots, H_{k-1}$, telles que

$$H_{k-1}\dots H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,k-1}^{(1)} & \tilde{a}_{1k}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 e^{i\alpha_2} & \cdots & \tilde{a}_{2,k-1}^{(2)} & \tilde{a}_{2k}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_{k-1}\|_2 e^{i\alpha_{k-1}} & \tilde{a}_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{k-1,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{kk}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{kn}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{k+1,k}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{k+1,n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{nk}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}^{(k-1)} \\ . & & & & & & \end{pmatrix}$$

On introduit alors le vecteur $a_k = {}^t(\tilde{a}_{kk}^{(k-1)}, \dots, \tilde{a}_{nk}^{(k-1)}) \in \mathbb{K}^{n-k+1}$ (première colonne de la sous-matrice entourée). Deux cas se présentent :

- Si $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} |\tilde{a}_{ik}^{(k-1)}| = 0$, alors, on pose $H_k = I_n$;
- Si $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} |\tilde{a}_{ik}^{(k-1)}| > 0$, alors, on pose $\tilde{H}_k = H(a_k - \|a_k\|_2 e^{i\alpha_k}e_k) \in \mathcal{M}_{n-k+1}(\mathbb{K})$ où α_k vérifie

$e^{i\alpha_k}|\tilde{a}_{kk}^{(k-1)}| = \tilde{a}_{kk}^{(k-1)}$ et

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{n-k+1,k-1} \\ 0_{k-1,n-k+1} & \tilde{H}_k \end{pmatrix} \qquad \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

La matrice H_k est de Househölder (pour le vecteur ${}^t(0_{1,k-1}, {}^t a_k)$) et vérifie

$$H_k \dots H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1k}^{(1)} & \tilde{a}_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 e^{i\alpha_2} & \cdots & \tilde{a}_{2k}^{(2)} & \tilde{a}_{2,k+1}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_k\|_2 e^{i\alpha_k} & \tilde{a}_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

→ <u>Étape n</u> L'étape $n-1$ a conduit à l'obtention de $n-1$ matrice de Househölder, H_1, …, H_{n-1}, éventuellement égales à l'identité, et qui vérifient

$$H_{n-1} \dots H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n-1}^{(1)} & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 & \cdots & \tilde{a}_{2,n-1}^{(2)} & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_{n-1}\|_2 & \tilde{a}_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Enfin, soit α_n tel que $e^{i\alpha_n}\tilde{a}_{nn}^{(n-1)} = |\tilde{a}_{nn}^{(n-1)}|$
• on pose $H_n = \mathrm{Diag}(e^{-i\alpha_1}, \dots, 1, e^{-i\alpha_n}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est une matrice diagonale unitaire.

On a, finalement

$$H_n \dots H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 & \tilde{\alpha}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{\alpha}_{1,n-1}^{(1)} & \tilde{\alpha}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 & \cdots & \tilde{\alpha}_{2,n-1}^{(2)} & \tilde{\alpha}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_{n-1}\|_2 & \tilde{\alpha}_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & |\tilde{a}_{nn}^{(n-1)}| \end{pmatrix}$$

et donc, il existe $n-1$ matrices de Househölder, $H_1, \dots, H_{n-1}$, et une matrice diagonale unitaire, H_n, telles que $H_n \dots H_1 A$ soit triangulaire supérieure à diagonale positive.

Théorème 9 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors, il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$.

De plus, on peut trouver R à éléments diagonaux strictement positifs. La factorisation est alors unique. .

Preuve :

→ <u>Existence</u> D'après la démonstration que l'on vient de faire, il existe $n-1$ matrices de Househölder, $H_1, \dots, H_{n-1}$, et une matrice diagonale unitaire, H_n, telles que $R = H_n \dots H_1 A$ soit triangulaire supérieure à diagonale positive. Si, de plus, A est inversible, comme les H_k $(k = 1, \dots, n)$ le sont, la matrice R est à diagonale strictement positive.

Posons alors $Q = (H_n \dots H_1)^{-1} = H_1 \dots H_{n-1} H_n^*$; puisque les H_k $(k = 1, \dots, n)$ sont unitaires, la matrice Q ainsi définie est unitaire et on obtient la décomposition attendue $A = QR$ avec Q unitaire et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

→ Unicité Supposons que $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ avec Q_k $(k = 1, 2)$ unitaire et R_k $(k = 1, 2)$ triangulaire supérieure à diagonale strictement positive (*i.e.*, si $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\dots,n}$ alors, $\forall\, i = 1, \dots, n$, $r_{ii}^{(k)} > 0$). Posons alors $B = R_2 R_1^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$; on a :

- B est triangulaire supérieure (car R_2 et R_1^{-1} le sont) ; donc B^* est triangulaire inférieure
- $B^* B = (R_2 R_1^{-1})^* (R_2 R_1^{-1}) = (Q_1 Q_2^{-1})^* (Q_1 Q_2^{-1}) = Q_2 Q_1^* Q_1 Q_2^* = Q_2 Q_2^* = I_n$ car $Q_k Q_k^* = I_n$ puisque les matrice Q_k $(k = 1, 2)$ sont unitaires ;
- Pour $i = 1, \dots, n$, $b_{ii} = r_{ii}^{(2)} / r_{ii}^{(1)} > 0$ donc la matrice B est de diagonale positive. Ainsi, $I_n = B^* B$ est la décomposition de Cholesky de I_n et, par unicité de cette décomposition (établie dans le cas réel au Théorème 14. ; l'extension au cas complexe est immédiate), $B = I_n$ et $R_2 = R_1$, $Q_2 = Q_1$.

□

Exercice traité: Chercher la décomposition QR de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2 & 1 \\ 2/3 & 2 & 5 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

→ 1[ère] étape : On pose $a_1 = {}^t \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.
Alors $\|a_1\|_2 = \dfrac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$ et $e^{i\alpha_1} = 1$ d'où $v_1 = {}^t \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned} H_1 &= I_3 - 2\frac{v_1\, v_1^*}{v_1^*\, v_1} = I_3 - 2\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \\ &= I_3 - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

→ 2[ème] étape : On pose $a_2 = {}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $a_2[2] = 0$, on choisit $H_2 = I_3$. On a alors

$$H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R$$

et $Q = H_1 H_2 = H_1 I_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Exercices

Exercice 1 : Méthode de Gauss

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ - & & x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Décomposition LU

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A (*i.e.* $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = {}^t(1.5, 4, -14, -6.5)$.

3) Soit $B = {}^tU\,A\,{}^tL$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B.

Exercice 3 : Décomposition LU

1) Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = {}^t(0, 2, -1, 5)$.

3) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

Exercice 4 : Décomposition de Cholesky.

Donner la factorisation de Cholesky des matrices :

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$

2) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : Décomposition QR

Chercher la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -46/5 & -43/5 \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -28/5 & 26/5 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Calcul de déterminant et décomposition LU

1) Expliquer comment on peut calculer le déterminant d'une matrice A d'ordre n à partir de sa factorisation LU.

2) Appliquer cette méthode à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$