

Chapitre 3

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires**3-1 Introduction**

Principe : Soit un système linéaire $Ax = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A \neq 0$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Une méthode itérative se présente sous la forme

$$u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et pour tout } k \geq 0, u_{k+1} = Bu_k + c \quad (*)$$

avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ construite à partir de A , $c \in \mathbb{K}^n$ construit à partir de A et b .

3-2 Quelques méthodes itératives particulières**3-2.1) Principe général**

On suppose que $A = M - N$ avec M facile à inverser (diagonale ou triangulaire). Alors

$$Ax = b \text{ si et seulement si } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

et on s'intéresse à la méthode itérative (1) telle que $B = M^{-1}N = I - M^{-1}A$ et $c = M^{-1}b$.

Pratiquement, on résout les systèmes linéaires successifs :

$$\text{pour tout } k, Mu_{k+1} = Nu_k + b.$$

3-2.2) Méthode de Jacobi

$A = D - E - F$ avec $D = \text{diag}(a_{kk})$ et $a_{kk} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n$, $E = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$
(triangulaire inférieure) et $F = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (triangulaire supérieure), qui est la
décomposition par points de la matrice A .

Définition : On appelle méthode itérative de Jacobi par points la méthode itérative :

$$u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et } u_{k+1} = D^{-1}(E + F)u_k + D^{-1}b$$

$J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$ est appelée matrice de Jacobi par points.

En posant $u_k = (u_1^k, \dots, u_n^k)$, on est conduit à résoudre $Du_{k+1} = (\bar{D} - A)u_k + b$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{11}u_1^{k+1} = -a_{12}u_2^k - a_{13}u_3^k \cdots - a_{1,n}u_n^k + b_1 \\ a_{22}u_2^{k+1} = -a_{21}u_1^k - a_{23}u_3^k \cdots - a_{2,n}u_n^k + b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}u_n^{k+1} = -a_{n,1}u_1^k - a_{n,2}u_2^k \cdots - a_{n,n-1}u_{n-1}^k + b_n \end{cases}$$

3-2.3) Méthode de Gauss-Seidel

On peut améliorer la méthode précédente en utilisant les quantités déjà calculées :

$$\begin{cases} a_{11}u_1^{k+1} = -a_{12}u_2^k - a_{13}u_3^k \cdots - a_{1,n}u_n^k + b_1 \\ a_{22}u_2^{k+1} = -a_{21}u_1^{k+1} - a_{23}u_3^k \cdots - a_{2,n}u_n^k + b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}u_n^{k+1} = -a_{n,1}u_1^{k+1} - a_{n,2}u_2^{k+1} \cdots - a_{n,n-1}u_{n-1}^{k+1} + b_n \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi $Du_{k+1} = Eu_{k+1} + Fu_k + b$, soit $u_{k+1} = (D - E)^{-1}Fu_k + (D - E)^{-1}b$ pour tout $k \geq 0$. ($D - E$ est inversible car $a_{kk} \neq 0$ pour tout k).

Définition : On appelle méthode itérative de Gauss-Seidel par points la méthode :

$$u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et, pour tout } k \geq 0, u_{k+1} = (D - E)^{-1}Fu_k + (D - E)^{-1}b.$$

La matrice $G = (D - E)^{-1}F$ est appelée matrice de Gauss-Seidel par points.

3-2.4) Méthode de relaxation

Définition : On appelle méthode itérative de relaxation par points la méthode définie pour $w \neq 0$ par :

$$u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et, pour tout } k \geq 0, u_{k+1} = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w}D + F\right) u_k + \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1} b.$$

La matrice $R_w = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$ est appelée matrice de relaxation par points.

Remarques :

- Pour $w = 1$, $R_w = G$.
- Comme $a_{kk} \neq 0$ pour tout k , $\left(\frac{D}{w} - E\right)$ est inversible.

Lorsque $w > 1$, on parle de sur-relaxation

Lorsque $w < 1$, on parle de sous-relaxation.

De manière pratique, la méthode de relaxation correspond à :

$$Du_{k+1} = (1-w)Du_k + wEu_{k+1} + wFu_k + wb$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1^{k+1} = a_{11}u_1^k - w(a_{11}u_1^k + a_{12}u_2^k + \cdots + a_{1,n}u_n^k) + wb_1 \\ a_{22}u_2^{k+1} = a_{22}u_2^k - w(a_{21}u_1^{k+1} + a_{22}u_2^k + \cdots + a_{2,n}u_n^k) + wb_2 \\ \vdots \\ a_{nn}u_n^{k+1} = a_{nn}u_n^k - w(a_{n,1}u_1^{k+1} + a_{n,2}u_2^{k+1} + \cdots + a_{n,n}u_n^k) + wb_n \end{cases}$$

Le problème principal sera de déterminer w_0 tel que $w_0 = \underset{w \in \mathbb{R}^*}{\operatorname{argmin}} \rho(R_w)$, afin d'optimiser la convergence (si $\rho(R_w) < 1$).

3-3 Quelques rappels sur les normes vectorielles et normes matricielles

3-3.1) Norme vectorielle

Définition : Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une norme sur V est une application $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- pour tout $(u, v) \in V^2$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est un espace vectoriel normé.

Les normes usuelles de $\mathbb{K}^n$ sont :

- $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$
- $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (norme euclidienne si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
- $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$
- $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$.

Théorème 10 : Soit $p \in [1, +\infty[$. L'application $\| \cdot \|_p$ est une norme.

Preuve : voir Exercice 1.

□

L'inégalité triangulaire :

$$\text{pour tous } u, v \in \mathbb{K}^n, \|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

est appelée inégalité de Minkowski.

Pour p et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

est appelée inégalité de Hölder.

Pour $p = q = 2$, cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition : Soit $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ deux normes définies sur un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel V de dimension finie. $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont équivalentes : il existe C et $C' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $v \in V$, $C' \|v\| \leq \|v\|' \leq C \|v\|$.

3-3.2) Normes matricielles

Définition : On appelle norme matricielle toute application $\| \cdot \| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$

- pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Étant donnée une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$, l'application :

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+, A \rightarrow \sup_{v \in \mathbb{K}^n, v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\| \leq 1} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\|=1} \|Av\|$$

est appelée norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

Proposition : Si $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée, alors,

$$\text{pour toute } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ pour tout } v \in \mathbb{K}^n, \|Av\| \leq \|A\| \|v\|.$$

Théorème 11 : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

- $\|A\|_1 = \sup \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \sup \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2$.
- $\|A\|_2$ est invariante par transformation unitaire ; si A est normale, $\|A\|_2 = \rho(A)$.
- $\|A\|_\infty = \sup \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Preuve : Pour tout vecteur v ,

$$\|Av\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} v_j \right| \leq \sum_j |v_j| \sum_i |a_{ij}| \leq \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right) \|v\|_1.$$

Pour montrer que le nombre $\max_j \sum_i |a_{ij}|$ est effectivement le plus petit nombre α pour lequel l'inégalité $\|Av\|_1 \leq \alpha \|v\|_1$ a lieu pour tout vecteur v , construisons un vecteur u (qui, bien entendu, dépend de la matrice A), tel que l'on ait l'égalité

$$\|Au\|_1 = \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right) \|u\|_1.$$

Il suffit de considérer le vecteur u de composantes

$$u_i = 0 \text{ pour } i \neq j_0, \quad u_{j_0} = 1,$$

où j_0 est un indice vérifiant

$$\max_j \sum_i |a_{ij}| = \sum_i |a_{ij_0}|.$$

De la même façon,

$$\|Av\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} v_j \right| \leq \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \|v\|_\infty.$$

Soit i_0 un indice vérifiant

$$\max_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|.$$

Le vecteur u de composantes

$$u_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \quad \text{si } a_{i_0,j} \neq 0, \quad u_j = 1 \quad \text{si } a_{i_0,j} = 0,$$

vérifie

$$\|Au\|_\infty = \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \|u\|_\infty,$$

ce qui règle le cas de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Puisque

$$\|A\|_2^2 = \sup \frac{v^* A^* A v}{v^* v} = \sup R_{A^* A}(v),$$

le théorème 3 permet d'affirmer que la borne supérieure du quotient de Rayleigh de la matrice hermitienne $A^* A$ est la plus grande valeur propre de cette matrice, qui se trouve être aussi son rayon spectral puisqu'elle est positive.

Montrons ensuite que $\rho(A^* A) = \rho(AA^*)$. Si $\rho(A^* A) > 0$, il existe un vecteur v tel que

$$v \neq 0, \text{ et } A^* A v = \rho(A^* A) v,$$

et on a $Av \neq 0$ car $\rho(A^* A) > 0$. Comme alors

$$Av \neq 0, \text{ et } AA^*(Av) = \rho(A^* A) Av,$$

il s'ensuit que

$$0 < \rho(A^* A) \leq \rho(AA^*),$$

et donc $\rho(AA^*) = \rho(A^* A)$ puisque $(A^*)^* = A$. Si $\rho(A^* A) = 0$, on a aussi $\rho(AA^*) = 0$, sans quoi le raisonnement précédent montrerait que $\rho(A^* A) > 0$. On a donc, dans tous les cas,

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^* A) = \rho(A^* A) = \|A^*\|_2^2.$$

L'invariance de la norme $\|\cdot\|_2$ par transformation unitaire n'est que la traduction des égalités

$$\rho(A^* A) = \rho(U^* A^* A U) = \rho(A^* U U^* A) = \rho(U^* A^* U U^* A U).$$

Enfin, si la matrice A est normale, il existe une matrice unitaire U telle que

$$U^* A U = \text{diag}(\lambda_i(A)) = D.$$

Dans ces conditions,

$$A^* A = (U D U^*)^* U D U^* = U D^* D U^*,$$

ce qui montre que

$$\rho(A^* A) = \rho(D^* D) = \max_i |\lambda_i(A)|^2 = (\rho(A))^2.$$

□

Théorème 12 :

- i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Alors $\rho(A) \leq \|A\|$.
- ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ telle que

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Preuve :

i) Voir exercice 2.

ii) D'après le théorème 2, il existe une matrice U telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire, supérieure par exemple :

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1,n} \\ & \lambda_2 & t_{23} & \cdots & t_{2,n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & t_{n-1,n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

les scalaires λ_i étant les valeurs propres de la matrice A . À tout scalaire $\delta \neq 0$, associons la matrice

$$D_\delta = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1}),$$

de sorte que

$$(UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{12} & \delta^2 t_{13} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ & \lambda_2 & \delta t_{23} & \cdots & \delta^{n-2} t_{2,n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1,n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, fixons le nombre δ de telle façon que

$$\sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} t_{i,j}| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Alors l'application

$$\| \cdot \| : B \mapsto \|B\| = \|(UD_\delta)^{-1}B(UD_\delta)\|_\infty,$$

qui, naturellement, dépend de la matrice A et du nombre ε , répond à la question. En effet, on a, d'une part,

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

d'après le choix de δ et de la définition de la norme matricielle $\| \cdot \|_\infty$ ($\|(c_{i,j})\|_\infty = \max_i \sum_j |c_{i,j}|$), et, d'autre

part, c'est bien une norme matricielle ; on vérifie en effet que c'est la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle

$$v \in \mathbb{K}^n \mapsto \|(UD_\delta)^{-1}v\|_\infty.$$

□

Théorème 13 : L'application $\| \cdot \|_E : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $A = (a_{ij}) \mapsto \sqrt{\text{Tr}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2}$ est une norme matricielle non subordonnée invariante par transformation unitaire et appelée *norme de Frobenius*. Elle vérifie :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2.$$

Théorème 14 :

- Soit $\| \cdot \|$ une norme matricielle et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|B\| < 1$. Alors $I + B$ est inversible et $\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$.
- Si une matrice de la forme $I + B$ est *singulière* (non inversible), alors $\|B\| \geq 1$ pour toute norme matricielle $\| \cdot \|$.

3-4 Suites de vecteurs et de matrices

Théorème 15 : Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k v = 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{K}^n \quad (2)$$

$$\rho(B) < 1 \quad (3)$$

$$\|B\| < 1 \text{ pour au moins une norme matricielle} \quad (4)$$

Preuve :

- Montrons que (1) implique (2).

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle et $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée. Alors

$$\text{pour tout } v \in \mathbb{K}^n, \|B^k v\| \leq \|B^k\| \|v\| \text{ avec } \lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\| = 0.$$

Ainsi, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k v\| = 0$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k v = 0$.

- Montrons que (2) implique (3).

Supposons, par contraposée, que $\rho(B) \geq 1$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq 1$ et $u \in \mathbb{K}^n$, $u \neq 0$ tel que $Bu = \lambda u$.

Par récurrence sur $k \geq 1$, on montre que

$$B^k u = B^{k-1}(Bu) = \lambda B^{k-1} u = \dots = \lambda^k u$$

donc $\|B^k u\| = |\lambda|^k \|u\|$ pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|$. Or, $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda|^k = +\infty$ ou 1, donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k u \neq 0$.

- Montrons que (3) implique (4).

Comme $\rho(B) < 1$, $1 - \rho(B) > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{1 - \rho(B)}{2}$. Par le théorème 12, il existe une norme matricielle subordonnée telle que $\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon = \frac{1 + \rho(B)}{2} < 1$.

- Montrons que (4) implique (1).

Par récurrence sur k , on voit que, pour tout $k \geq 1$,

$$\|B^k\| \leq \|B\| \|B^{k-1}\| \leq \dots \leq \|B\|^k$$

donc, puisque $\|B\| < 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\| = 0$, ce qui prouve que $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$. □

Théorème 16 :

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$.

Preuve : Exercice 5. □

3-5 Convergence des méthodes étudiées

Définition : La méthode itérative $(*)$ ($u_0, u_{k+1} = Bu_k + c$) est dite convergente si

$$\text{pour tout } u_0 \in \mathbb{K}^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = x^*$$

où x^* est la solution de $Ax = b$.

Remarque : On a alors $x^* = Bx^* + c$.

Théorème 17 : Critère de convergence des méthodes itératives

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) La méthode itérative $(*)$ est convergente vers x^* tel que $x^* = Bx^* + c$;
- ii) $\rho(B) < 1$;
- iii) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle $\|\cdot\|$.

Preuve : voir Exercice 1 et Théorème 15. □

Théorème 18 :

- Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle et soit $x^* \in \mathbb{K}^n$ tel que $x^* = Bx^* + c$. Soit la méthode itérative $(*)$. Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \|u_k - x^*\|^{1/k} \right) = \rho(B)$$

- Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle et soit $x^* \in \mathbb{K}^n$ tel que $x^* = Bx^* + c = \tilde{B}x^* + \tilde{c}$. Soit les méthodes itératives $(*)$ et

$$\tilde{u}_0 = u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et } \tilde{u}_{k+1} = \tilde{B}\tilde{u}_k + \tilde{c} \text{ pour tout } k \geq 0. \quad (**)$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho_\varepsilon > 0$ tel que,

$$\text{si } k \geq \rho_\varepsilon, \text{ alors } \sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{u}_k - x^*\|}{\|u_k - x^*\|} \right)^{1/k} \geq \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B) + \varepsilon}.$$

Preuve :

•

$$\sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \|u_k - x^*\|^{1/k} = \sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \|B^k(u_0 - x^*)\|^{1/k} = \|B^k\|^{1/k} \rightarrow \rho(B)$$

d'après le théorème 16.

•

$$\begin{aligned} \sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{u}_k - x^*\|}{\|u_k - x^*\|} \right)^{1/k} &= \sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{B}^k(u_0 - x^*)\|}{\|B^k(u_0 - x^*)\|} \right)^{1/k} \\ &\geq \sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \frac{1}{\rho(B)} \|\tilde{B}^k(u_0 - x^*)\|^{1/k} = \frac{1}{\rho(B)} \|\tilde{B}^k\|^{1/k} \rightarrow \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \varepsilon \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)(\rho(B) + \varepsilon)} > 0$. Il existe ρ_ε tel que, si $k \geq \rho_\varepsilon$, alors

$$\sup_{\|u_0 - x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{u}_k - x^*\|}{\|u_k - x^*\|} \right)^{1/k} \geq \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)} - \varepsilon' = \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)} \left(1 - \varepsilon \frac{1}{\rho(B) + \varepsilon} \right) = \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)} \times \frac{\rho(B)}{\rho(B) + \varepsilon} = \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B) + \varepsilon}$$

□

Théorème 19 : Soit A une matrice hermitienne définie positive, décomposée sous la forme $A = M - N$ avec M inversible. Si $M^* + N$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Preuve : Soit la norme vectorielle $\| \cdot \| : u \in \mathbb{K}^n \mapsto \sqrt{u^* A u}$ (qui est une norme car A est hermitienne définie positive) et $\| \cdot \|$ la norme matricielle subordonnée.

On a $M^* + N$ hermitienne car $M^* + N = A^* + N^* + N = A + N + N^* = M + N^*$.

Or, $\|M^{-1}N\| = \|I - M^{-1}A\| = \sup_{\|u\|=1} \|u - M^{-1}Au\|$.

Or $\|u - M^{-1}Au\| = \|u - w\|$ avec $w = M^{-1}Au$ si et seulement si $u = A^{-1}Mw$, si et seulement si $u^* = w^* M^* A^{-1}$ ($w \neq 0$ si $u \neq 0$). D'où

$$\begin{aligned} \|u - M^{-1}Au\|^2 &= (u - w)^* A (u - w) \\ &= u^* A u - w^* A u - u^* A w + w^* A w \\ &= 1 - w^* M w - w^* M^* w + w^* A w \\ &= 1 - w^* (M^* + M - A) w = 1 - w^* (M^* + N) w \end{aligned}$$

avec $w^* (M^* + N) w > 0$ car $M^* + N$ est hermitienne définie positive. Donc $\|u - M^{-1}Au\| < 1$.

Or, sur le compact $\mathcal{S}(0, 1)$, $u \mapsto \|u - M^{-1}Au\|$ est continue et atteint donc ses bornes : il existe u_0 tel que $\|u_0\| = 1$ et $\|I - M^{-1}A\| = \|u_0 - M^{-1}Au_0\| < 1$.

□

Théorème 20 : (Ostrowski-Reich) Condition suffisante de convergence de la méthode par relaxation. Si la matrice A est hermitienne définie positive, la méthode de relaxation converge pour $w \in]0, 2[$.

Preuve : $A = M - N = \left(\frac{D}{w} - E \right) - \left(\frac{1-w}{w} D + F \right)$. On pose $M = \frac{D}{w} - E$ et $N = \frac{1-w}{w} D + F$.

Alors $M^* + N = \frac{D}{w} - E^* + \frac{1-w}{w} D + F = \frac{2-w}{w} D - E^* + F$.

Or, comme A est hermitienne, $E^* = F$ donc $M^* + N = \frac{2-w}{w} D$.

Puisque A est hermitienne, $e_k^* A e_k = a_{kk} > 0$ implique que $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ est définie positive donc $M^* + N$ est définie positive si et seulement si $w \in]0, 2[$.

Le théorème 19 permet de conclure.

□

Théorème 21 : Condition nécessaire de convergence de la méthode par relaxation.

- Le rayon spectral de la matrice de relaxation est tel que $\rho(R_w) \geq |w - 1|$.
- Ainsi, si $w \notin]0, 2[$, la méthode de relaxation ne converge pas.

Preuve : $R_w = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$. On a

$$\prod_{k=1}^n \lambda_k(R_w) = \det(R_w) = \left[\det\left(\frac{D}{w} - E\right)\right]^{-1} \det\left(\frac{1-w}{w}D + F\right) = \frac{\left(\frac{1-w}{w}\right)^n \det(D)}{\frac{1}{w^n} \det D} = (1-w)^n.$$

Or, $\rho(R_w)^n \geq \prod_{k=1}^n |\lambda_k(R_w)| = |1-w|^n$, ce qui entraîne les deux affirmations du théorème.

□

Exercices

Exercice 1 : Démonstration du Théorème 10.

L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
- 2) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que :

$$\text{pour tous } \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 3) En déduire que $\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q$, toujours avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 4) Montrer alors que $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

[On utilisera la relation : $(|u_i| + |v_i|)^p = |u_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} + |v_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1}$]

Exercice 2 : Démonstration du Théorème 12-i)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Montrer alors que $\rho(A) \leq \|A\|$.

Exercice 3 : Un exemple de norme matricielle non subordonnée (Théorème 13)

Soit l'application $\|\cdot\|_E : \begin{cases} \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \|A\|_E = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} \end{cases}$.

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_E$ est une norme matricielle et non subordonnée pour $n \geq 2$.
- 2) Montrer que $\|\cdot\|_E$ est invariante par transformation unitaire et qu'elle vérifie :

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}_n.$$

Exercice 4 : Démonstration du Théorème 14

1) Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle, B une matrice telle que $\|B\| < 1$ et I la matrice identité. Montrer alors que :

- a) $I + B$ est inversible.
- b) $\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$.

2) Montrer que, si $(I + B)$ est singulière, alors $\|B\| \geq 1$ pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$.

Exercice 5 : Démonstration du Théorème 16.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$ et on note de la même façon la norme matricielle subordonnée.

- 1) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $B_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$;
 - a) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|B_\varepsilon^p\| = 0$.
 - b) Montrer que $\rho(A) \leq \|A^p\|^{1/p}$.
 - c) En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|A^p\|^{1/p} = \rho(A)$.

2) Montrer que si A est symétrique, $\rho(A) = \|A\|_2$.

Exercice 6 : Soit A une matrice d'ordre $n \geq 2$, inversible et à coefficients réels. On écrit la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M est "facilement inversible" et on s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$. Dans ce but, on introduit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \text{ et } x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b.$$

- 1) Résultats généraux :
 - a) Montrer que si la suite converge, c'est nécessairement vers la solution de $Ax = b$.
 - b) Soit $B = M^{-1}N$ et $\rho(B)$ son rayon spectral. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
 - i. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ avec $Ax = b$
 - ii. $\rho(B) < 1$.

c) Montrer que, s'il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|B\| < 1$, alors la méthode itérative ci-dessus est convergente.

2) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie par le choix de $M = D$ avec D matrice diagonale de A : $d_{ii} = a_{ii}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

- a) Quel est le nom de cette méthode ?
- b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, alors cette méthode converge.

3) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie pour une matrice M telle que :

$$m_{ij} = 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n \text{ et } m_{ij} = a_{ij} \text{ pour } 1 \leq j \leq i \leq n.$$

a) Quel est le nom de cette méthode ?

b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors cette méthode converge.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; que peut-on dire de la convergence des deux méthodes proposées précédemment ?

Exercice 7 : Soit A une matrice tridiagonale de taille $n \geq 3$ dont les termes diagonaux sont non nuls. Soit D la matrice diagonale de A , E (resp. F) la matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) stricte de A . On a donc $A = D + E + F$; on pose $J = -D^{-1}(E + F)$ et $G = -(D + E)^{-1}F$.

1) Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on définit, pour tout réel non nul t , la matrice $M(t) = (m_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $m_{ij}(t) = t^{i-j}m_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Montrer alors que :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^*, \quad \det(M(t)) = \det(M).$$

2) On pose $M = F + \lambda^2(D + E)$. En utilisant les notations de la questions 1), écrire la matrice $M(1/\lambda)$ en fonction de D , E , F et λ .

3) Montrer que si P_J est le polynôme caractéristique de J et P_G celui de G , alors on a $P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda)$. En déduire que $\rho(G) = (\rho(J))^2$ et conclure.