MI0A20 : Analyse numérique matricielle

Corrigé du CONTROLE 1 (07.02.07)

---

1. $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ e_{n,1} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$ et $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_{3,2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & e_{n,2} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$.

$L_1L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{3,1} & -e_{3,2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ -e_{n,1} & -e_{n,2} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$ mais on n'a pas $L_1L_2 = L_2L_1$. Par exemple, pour $n = 3$,

$$L_2L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & 0 \\ -e_{3,1} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & 0 \\ -e_{3,1} + e_{3,2}e_{2,1} & -e_{3,2} & 1 \end{pmatrix}.$$

---

2. a) $A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & -2 & 6 & -5 \\ 24 & -12 & 41 & -39 \\ -27 & 18 & -62 & 54 \\ 9 & 14 & 15 & -47 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$E_1A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & \boxed{4} & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 20 & -3 & -32 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$E_2E_1A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 9 \\ 0 & 0 & 32 & -37 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}}$.

b) On a alors $\det A = \det L \times \det U = \det U = 3 \times 4 \times (-8) \times (-1)$, soit $\boxed{\det A = 96}$.

c) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

→ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} \tilde{x}_1 & & & & = & 3 \\ 8\tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = & 17 \\ -\ 9\tilde{x}_1 & & +\tilde{x}_3 & & = & -35 \\ 3\tilde{x}_1 & +5\tilde{x}_2 & -4\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = & 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 3 \\ \tilde{x}_2 = 17 - 8\tilde{x}_1 = -7 \\ \tilde{x}_3 = -35 + 9\tilde{x}_1 = -8 \\ \tilde{x}_4 = 6 - 9 + 35 - 32 = 0 \end{array} \right.$$

→ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ & & 4x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & -7 \\ & & & - & 8x_3 & + & 9x_4 & = & -8 \\ & & & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{array} \right.$$

MI0A20 : Analyse numérique matricielle

Corrigé du CONTROLE 2 (28.02.07)

---

1. Si A est une matrice symétrique définie positive, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure telle que $A = B\,{}^tB$.

De plus, si on impose que les éléments diagonaux de B soient positifs, alors la factorisation est unique.

---

2. → $\underline{1^{\text{ère}}\text{ étape}}$: Posons $a_1 = {}^t(4/9, 1/9, 8/9)$. Alors,

- $\| a_1 \|_2 = \frac{1}{9}\sqrt{16+1+64} = \sqrt{81}/9 = 1$ et $e^{i\alpha_1} = 1$;
- $v_1 = a_1 - \|a_1\| e_1 = {}^t(-5/9, 1/9, 8/9)$;
- $H_1 = I_3 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}(-5,1,8)}{(-5,1,8)\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}} = I_3 - \dfrac{2}{90}\begin{pmatrix} 25 & -5 & -40 \\ -5 & 1 & 8 \\ -40 & 8 & 64 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{45}\begin{pmatrix} 20 & 5 & 40 \\ 5 & 44 & -8 \\ 40 & -8 & -19 \end{pmatrix}$.
- $H_1 A = \dfrac{1}{45 \times 9}\begin{pmatrix} 20 & 5 & 40 \\ 5 & 44 & -8 \\ 40 & -8 & -19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -8 & -1 \\ 1 & 7 & -4 \\ 8 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4/5 & -7/5 \\ 0 & -3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

→ $\underline{2^{\text{ème}}\text{ étape}}$: Posons $a_2 = {}^t(4/5, -3/5)$. Alors,

- $\| a_2 \|_2 = \frac{1}{5}\sqrt{16+9} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1$ et $e^{i\alpha_2} = 1$;
- $v_2 = {}^t(-1/5, -3/5)$;
- $\tilde{H}_2 = I_2 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}(1,3)}{(1,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = I_2 - \dfrac{2}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$;

$H_2 H_1 A = R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4/5 & -7/5 \\ 0 & -3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$, soit $\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$;

et $Q = (H_2H_1)^{-1} = H_1^{-1}H_2^{-1} = H_1H_2 = \dfrac{1}{45 \times 5}\begin{pmatrix} 20 & 5 & 40 \\ 5 & 44 & -8 \\ -40 & -8 & -19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

soit $\boxed{Q = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$.

MI0B16Y : Analyse numérique matricielle

Corrigé du PARTIEL (21.03.07)

---

1. Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^tB = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} & b_{4,1} \\ 0 & b_{2,2} & b_{3,2} & b_{4,2} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & b_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,4} \end{pmatrix}$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
b_{1,1}^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{1,1} = 1 \\
b_{1,1} \times b_{2,1} = -1 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,1} = -1 \\
b_{1,1} \times b_{3,1} = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,1} = 1 \\
b_{1,1} \times b_{4,1} = -1 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,1} = -1 \\
\\
b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 5 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,2} = 2 \\
b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = -5 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,2} = \frac{-5+1}{2} = -2 \\
b_{2,1} \times b_{4,1} + b_{2,2} \times b_{4,2} = 5 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,2} = \frac{5-1}{2} = 2 \\
\\
b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 14 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,3} = \sqrt{14-1-4} = \sqrt{9} = 3 \\
b_{3,1}b_{4,1} + b_{3,2}b_{4,2} + b_{3,3}b_{4,3} = -14 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,3} = \frac{-14+1+4}{3} = -\frac{9}{3} = -3 \\
\\
b_{4,1}^2 + b_{4,2}^2 + b_{4,3}^2 + b_{4,4}^2 = 30 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,4} = \sqrt{30-1-4-9} = \sqrt{16} = 4
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}$.

Pour la décomposition LU de la matrice A, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & -5 & 14 & -14 \\ -1 & 5 & -14 & 30 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & -5 & 14 & -14 \\ -1 & 5 & -14 & 30 \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$E_1A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{4} & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 13 & -13 \\ 0 & 4 & -13 & 29 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 25 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ <u>Système $L\tilde{x} = b$:</u>

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} & \tilde{x}_1 & & & & = -2 \\ - & \tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = 6 \\ & \tilde{x}_1 & -\tilde{x}_2 & +\tilde{x}_3 & & = -15 \\ - & \tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & -\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = 47 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = -2 \\ \tilde{x}_2 = 6 + \tilde{x}_1 = 4 \\ \tilde{x}_3 = -15 - \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = -9 \\ \tilde{x}_4 = 47 - 2 - 4 - 9 = 32 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ <u>Système $Ux = \tilde{x}$:</u>

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ & & 4x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 4 \\ & & & & 9x_3 & - & 9x_4 & = & -9 \\ & & & & & & 16x_4 & = & 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = 2 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{array}\right.$$

La solution est donc x où $\boxed{{}^t x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$.

---

2. $A = M - N$ et $\det(M^1N - \lambda I) = \det(M^{-1})\det(N - \lambda M) = -\det(M^{-1})\det(\lambda M - N)$.

Pour $M = 2I$, $P_J(\lambda) = -\dfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2\lambda \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{8}(8\lambda^3 + 2\lambda + 4\lambda + 4\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 + \dfrac{5}{4}\right)$,

donc les valeurs propres de J sont 0 et $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$.

On a alors $\rho(J) = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$ et $\boxed{\text{la méthode de Jacobi diverge}}$.

On a de même, $\det(G - \lambda I) = \det(M^{-1}N - \lambda I) = -\det(M^{-1})\det(\lambda M - N)$ avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $P_G(\lambda) = -\dfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ -\lambda & -\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{8}\left(8\lambda^3 + 2\lambda - 2\lambda^2 + 10\lambda^2\right)$,

soit $P_G(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + \lambda + \dfrac{1}{4}) = -\lambda\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\right)^2$. Les valeurs propres de G sont donc 0 et $-\dfrac{1}{2}$ d'où $\rho(G) = \dfrac{1}{2} < 1$ et la méthode de Gauss-Seidel converge alors que la méthode de Jacobi diverge.

---

3. 1) a) $Uu = nu$ donc u est vecteur propre de U associé à la valeur propre n. D'autre part, U est de rang 1 donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$, avec $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(U) = \{0, n\}}$.

b) $A(\alpha,\beta,\alpha)=(\beta-\alpha)I+\alpha U$. Si $x\in E_0$, alors $Ux=0$ et $A(\alpha,\beta,\alpha)x=(\beta-\alpha)x$. De plus, si $A(\alpha,\beta,\alpha)u=(\beta-\alpha+n\alpha)u$. Ainsi, les valeurs propres de $A(\alpha,\beta,\alpha)$ sont $\boxed{\beta-\alpha \text{ et } \beta+(n-1)\alpha}$.

c) On a $A=M-N$ et $J=M^{-1}N$ avec, pour la méthode de Jacobi, $M=\beta I$, donc $J=\dfrac{1}{\beta}N$ où $N=A(-\alpha,0,-\alpha)$. D'où $J=A\left(-\dfrac{\alpha}{\beta},0,-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$ et d'après b) avec $\beta'=0$ et $\alpha'=-\dfrac{\alpha}{\beta}$, les valeurs propres de J sont $\beta'-\alpha'=-\dfrac{\alpha}{\beta}$ et $\beta'+(n-1)\alpha'=-(n-1)\dfrac{\alpha}{\beta}$. Ainsi, $\rho(J)=(n-1)\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$. On sait que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(G)<1$ c'est-à-dire $\boxed{|\beta|>(n-1)|\alpha|}$.

2) a) Si on note $c_1,\cdots,c_n$ les colonnes de A, on a $\det(A+tU)=\det(c_1+tu,\cdots,c_n+tu)$. On utilise alors la multilinéarité du determinant et le fait que, si 2 colonnes sont identiques, le déterminant est nul. On a alors ici :

$$\begin{aligned}\det(A+tU) &= \det(c_1,\cdots,c_n)+\\ &\quad t(\det(u,c_2,\cdots,c_n)+\det(c_1,u,c_3,\cdots,c_n)+\cdots+\det(c_1,\cdots,c_{n-1},u)),\end{aligned}$$

soit $\det(A+tU)=\det A+Kt$. Pour $t=-\gamma$, on a $A+tU=A(\alpha-\gamma,\beta-\gamma,0)$ donc

$$\det(A+tU)=(\beta-\gamma)^n=\det A-\gamma K. \tag{1}$$

De même, pour $t=-\alpha$, $A+tU=A(0,\beta-\alpha,\gamma-\alpha)$ donc

$$(\beta-\alpha)^n=\det A-\alpha K. \tag{2}$$

Pour éliminer K, on fait $\alpha\times(1)-\beta\times(2)$, d'où $\boxed{\det A(\alpha,\beta,\gamma)=\dfrac{\alpha(\beta-\gamma)^n-\gamma(\beta-\alpha)^n}{\alpha-\gamma}}$.

b) $A(\alpha,\beta,\alpha)=A(\alpha,\beta,0)-A(0,0,\alpha)=M-N$ et $\lambda M-N=A(\lambda\alpha,\lambda\beta,\alpha)$. On a alors

$$\begin{aligned}P_G(\lambda) &= \det(G-\lambda I)=\det(M^{-1}N-\lambda I)=\det M^{-1}\det(N-\lambda M)\\ &= \frac{1}{\beta^n}(-1)^n\det A(\lambda\alpha,\lambda\beta,\alpha)=\frac{(-1)^n}{\beta^n}\frac{\lambda\alpha(\lambda\beta-\alpha)^n-\alpha(\lambda\beta-\lambda\alpha)^n}{\lambda\alpha-\alpha}\end{aligned}$$

soit, en simplifiant par α, $\boxed{P_G(\lambda)=(-1)^n\dfrac{\lambda\left(\lambda-\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\lambda^n}{\lambda-1}}$.

On a alors $\boxed{P_G(0)=0}$ et $\dfrac{P_G(\lambda)}{\lambda}=\dfrac{(-1)^n}{\beta^n}\dfrac{(\lambda\beta-\alpha)^n-(\beta-\alpha)^n\lambda^{n-1}}{\lambda-1}$ donc $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{P_G(\lambda)}{\lambda}=-\dfrac{\alpha^n}{\beta^n}$. Or $P_G(\lambda)=\det(G-\lambda I)=\prod\limits_{\lambda_i\in \mathrm{Sp}(G)}(\lambda_i-\lambda)=-\lambda\prod\limits_{\lambda_i\in \mathrm{Sp}(G)\setminus\{0\}}(\lambda_i-\lambda)$ et on a bien $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{P_G(\lambda)}{\lambda}=-\prod\limits_{\lambda_i\in \mathrm{Sp}(G)\setminus\{0\}}\lambda_i}$. On a donc, pour $|\alpha|\geq|\beta|$, $\prod\limits_{\lambda_i\in \mathrm{Sp}(G)\setminus\{0\}}|\lambda_i|\geq 1$, ce qui implique $\rho(G)\geq 1$, car sinon, on aurait $|\lambda_i|<1$ pour tout i et le produit serait aussi <1. Ainqi, d'après le cours, comme $\rho(G)\geq 1$, la méthode de Gauss-Seidel ne converge pas.

$\boxed{\text{MI0B16 : Analyse numérique matricielle}}$

$\boxed{\textbf{Corrigé du CONTROLE 1 (03.10.07)}}$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit $E_\alpha E_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}$ (ajout de αL_1 au L_2 de E_β) alors que $E_\beta E_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha\beta & \beta & 1 \end{pmatrix}$ (ajout de βL_2 au L_3 de E_α. $(E_\alpha E_\beta)^{-1} = E_\beta^{-1} E_\alpha^{-1} = E_{-\beta} E_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ \alpha\beta & -\beta & 1 \end{pmatrix}$, alors que $(E_\beta E_\alpha)^{-1} = E_\alpha^{-1} E_\beta^{-1} = E_{-\alpha} E_{-\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix}$. [*2 points*]

$\boxed{\textbf{2.}}$ L'opération matricielle qui permet de permuter la première et la quatrième ligne de A est la multiplication à gauche de A par $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. [*2 points*]

$\boxed{\textbf{3.}}$ a) $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \; L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}}$.[*3 points*]

b) On a alors $\det A = \det L \times \det U = \det U = 1 \times 1 \times 1 \times 4$, soit $\boxed{\det A = 4}$. [*1 point*]

c) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ <u>Système $L\tilde{x} = b$:</u>

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 & & & & = 0 \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 & & & & = 2 \\ & \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 & & & = 2 \\ \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 - 5\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 & & & & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 2 \\ \tilde{x}_3 = 0 \\ \tilde{x}_4 = 4 \end{cases}$$

$\rightarrow$ <u>Système $Ux = \tilde{x}$:</u>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 = 0 \\ 4x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

donc $\boxed{x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$. [*2 points*]

Bonus : Pour résoudre $A^2u = b$, c'est-à-dire $A(Au) = b$, on a tout d'abord $Au = A^{-1}b = x$ qui vient d'être calculé. Il ne reste plus qu'à résoudre $Au = x$, soit $LUu = x$. Pour cela, on résout successivement les systèmes $L\tilde{u} = x$ et $Uu = \tilde{u}$:

→ Système $L\tilde{u} = x$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \tilde{u}_1 & & & & & & & = & -1 \\ \tilde{u}_1 & + & \tilde{u}_2 & & & & & = & 0 \\ & & \tilde{u}_2 & + & \tilde{u}_3 & & & = & 0 \\ \tilde{u}_1 & - & 2\tilde{u}_2 & - & 5\tilde{u}_3 & + & \tilde{u}_4 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \tilde{u}_1 & = & -1 \\ \tilde{u}_2 & = & 1 \\ \tilde{u}_3 & = & -1 \\ \tilde{u}_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

→ Système $Uu = \tilde{u}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} u_1 & + & u_2 & + & 3u_3 & + & u_4 & = & -1 \\ & & u_2 & - & 2u_3 & + & 2u_4 & = & 1 \\ & & & & u_3 & & & = & -1 \\ & & & & & & 4u_4 & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_4 = -1/4 \\ u_3 = -1 \\ u_2 = 1 - 2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ u_1 = -1 + \dfrac{1}{2} + 3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{4} \end{array}\right.$$

donc $\boxed{u = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$. [*1,5 points*]

MI0B16Y : Analyse numérique matricielle

Corrigé du CONTROLE 2 (18.10.07)

---

1. $A = LU = (L\Sigma)(\Sigma^{-1}U) = BC$. Si on prend $\Sigma = \mathrm{diag}(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \sqrt{u_{33}}) = \mathrm{diag}(2,3,4)$ on a alors $L\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = B$ (multiplication à droite par une matrice diagonale donc ce sont les colonnes de L que l'on multiplie) et $\Sigma^{-1}U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C$ (multiplication à gauche par une matrice diagonale donc ce sont les lignes que l'on multiplie). On constate que l'on a $C = {}^tB$ et donc $A = B\,{}^tB$. [*2 points*]

---

2. $\rightarrow$ 1$^{\text{ère}}$ étape : Posons $a_1 = {}^t(3\ 4\ 0)$. Alors,

- $\| a_1 \|_2 = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5$ et $e^{i\alpha_1} = 1$;
- $v_1 = a_1 - \|a_1\| e_1 = {}^t(-2\ \ 4\ \ 0) = -2\,{}^t(1\ \ -2\ \ 0)$;
- $H_1 = I_3 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ \ -2\ \ 0)}{(1\ \ -2\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}} = I_3 - \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [*1,5 points*]
- $H_1 A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. [*1 point*]

$\rightarrow$ 2$^{\text{ème}}$ étape : Posons $a_2 = {}^t(-4\ \ 3)$. Alors,

- $\| a_2 \|_2 = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $e^{i\alpha_2} = -1$;
- $v_2 = {}^t(-4\ \ 3) + {}^t(5\ \ 0) = {}^t(1\ \ 3)$;
- $\tilde{H}_2 = I_2 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}(1\ \ 3)}{(1\ \ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = I_2 - \dfrac{2}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$; $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$ [1,5 points] et $H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & -48/5 \\ 0 & 0 & -14/5 \end{pmatrix}$. [1 point]

Enfin, $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{R = H_3 H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 48/5 \\ 0 & 0 & 14/5 \end{pmatrix}}$. [*1 point*]

On a alors $A = QR$ avec $Q = (H_3 H_2 H_1)^{-1} = H_1 H_2 H_3 = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 3/5 & -16/25 & 12/25 \\ 4/5 & 12/25 & -9/25 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}}$. [*2 points*]

$\boxed{\text{MI0B16Y : Analyse numérique matricielle}}$

$\boxed{\textbf{Corrigé du Partiel du 08.11.07}}$

$\boxed{\textbf{I}}$ $\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ a & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = \Delta(a,b) = b^3 - 2a^2b = b(b^2 - 2a^2) = b(b - \sqrt{2}a)(b + \sqrt{2}a).$

1. $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \Delta(\alpha, 2 - \lambda)$ qui s'annule pour $2 - \lambda = 0$, $2 - \lambda = \sqrt{2}\alpha$ et $2 - \lambda = -\sqrt{2}\alpha$. Les valeurs propres de A sont donc 2, $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \alpha)$ et $\sqrt{2}(\sqrt{2} + \alpha)$. Elles sont strictement positives si et seulement si $\sqrt{2} - \alpha > 0$ et $\sqrt{2} + \alpha > 0$, soit $\boxed{\alpha \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[}$.

2. A est à diagonale strictement dominante si et seulement si $2 > |\alpha|$ et $2 > 2|\alpha|$, ce qui donne $|\alpha| < 1$, soit $\boxed{\alpha \in]-1; 1[}$.

3. $J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha/2 & 0 \\ -\alpha/2 & 0 & -\alpha/2 \\ 0 & -\alpha/2 & 0 \end{pmatrix}$ et la méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(J) < 1$. Or $\chi_J(\lambda) = \Delta(-\alpha/2; -\lambda)$ qui s'annule pour $-\lambda = 0$, $-\lambda = -\alpha/\sqrt{2}$ et $-\lambda = \alpha/\sqrt{2}$. On a donc $\rho(J) = |\alpha|/\sqrt{2}$ qui est < 1 si et seulement si $|\alpha| < \sqrt{2}$. Donc $\boxed{\text{la méthode de Jacobi converge pour } \alpha \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[}$.

4. $G = (D - E)^{-1}F$ avec $D - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$.

$(D - E)x = y$ donne $\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 = y_1 \\ \alpha x_1 + 2x_2 = y_2 \\ \alpha x_2 + 2x_3 = y_3 \end{array} \right.$, soit $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{y_1}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_2}{2} - \dfrac{\alpha}{4} y_1 \\ x_3 = \dfrac{y_3}{2} - \dfrac{\alpha}{4} y_2 + \dfrac{\alpha^2}{8} y_1 \end{array} \right.$ donc

$$G = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -\alpha/4 & 1/2 & 0 \\ \alpha^2/8 & -\alpha/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha/2 & 0 \\ 0 & \alpha^2/4 & -\alpha/2 \\ 0 & -\alpha^3/8 & \alpha^2/4 \end{pmatrix}$$

et $\chi_G(\lambda) = -\lambda \left((\alpha^2/4 - \lambda)^2 - \alpha^4/16 \right)$ donc les valeurs propres de G sont 0 et $\alpha^2/2$ et $\rho = \alpha^2/2 < 1$ pour $\alpha^2 < 2$.

$\boxed{\text{La méthode de Gauss-Seidel converge donc pour } \alpha \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[}$.

$\boxed{\textbf{II}}$ 1. D'après le cours sur les matrices tridiagonales, avec ici $b_k = 2$ et $a_k = c_k = -1$ pour tout k, on a, en posant $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = 2$, $\delta_k = \det \Delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ pour $k \geq 2$. Ainsi, $\det A_2 = 2\delta_1 - \delta_0 = 3$, $\det A_3 = 2\delta_2 - \delta_1 = 2 \times 3 - 2 = 4$. Par récurrence double, si $\det A_{n-2} = n - 1$ et $\det A_{n-1} = n$, alors $\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2} = 2n - (n - 1) = n + 1$ et on a bien $\boxed{\det A_n = n + 1 \text{ pour tout } n \geq 2}$.

2. Toujours d'après le cours, la décomposition LU de A_n est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\dfrac{2}{3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{n-1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dfrac{n}{n-1} & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{n+1}{n} \end{pmatrix}$$

Si on impose les coefficients diagonaux de B positifs dans la factorisation de Cholesky, on a unicité et, toujours d'après le cours,

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} & \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

3. a) On résout $LUx = b$, soit d'abord $Ly = b$, puis $Ux = y$. D'après ce qui précède, on a alors $\left\{\begin{array}{l} y_1 = 19 \\ y_2 = 19 + \dfrac{19}{2} = \dfrac{57}{2} \\ y_3 = -3 + \dfrac{57}{3} = 16 \\ y_4 = -12 + 12 = 0 \end{array}\right.$, puis $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5}{4}x_4 = 0 \\ \dfrac{4}{3}x_3 = 16 \text{ soit } x_3 = 12 \\ \dfrac{3}{2}x_2 = \dfrac{57}{2} + 12 \text{ soit } x_2 = 27 \\ 2x_1 = 19 + x_2 \text{ soit } x_1 = 23 \end{array}\right.$.

La solution est donc $\boxed{x = {}^t\begin{pmatrix} 23 & 27 & 12 & 0 \end{pmatrix}}$.

b) Pour Jacobi, $M = D = 2I$ et $N = E + F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $u^{(k+1)} = Ju^{(k)} + c$ avec $J = \dfrac{1}{2}N$ et $c = M^{-1}b = \dfrac{1}{2}b$. Avec $u^{(0)} = 0$, on obtient $u^{(1)} = c = \dfrac{1}{2}b$ et $u^{(2)} = Jc + c$, soit $\boxed{u^{(1)} = {}^t\begin{pmatrix} \dfrac{19}{2} & \dfrac{19}{2} & -\dfrac{3}{2} & -6 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{u^{(2)} = {}^t\begin{pmatrix} \dfrac{57}{4} & \dfrac{27}{2} & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{27}{4} \end{pmatrix}}$.

Pour Gauss-Siedel, $M = D - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{16} & \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

et $N = F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $G = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et on a alors $u^{(k+1)} = Gu^{(k)} + c$ avec $c = M^{-1}b = {}^t\begin{pmatrix} \frac{19}{2} & \frac{57}{4} & \frac{45}{8} & -\frac{51}{16} \end{pmatrix}$.

Avec $u^{(0)} = 0$, on obtient $u^{(1)} = c$ et $u^{(2)} = Gc + c$, soit

$$\boxed{u^{(1)} = {}^t\begin{pmatrix} \frac{19}{2} & \frac{57}{4} & \frac{45}{8} & -\frac{51}{16} \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{u^{(2)} = {}^t\begin{pmatrix} \frac{133}{8} & \frac{165}{8} & \frac{231}{32} & -\frac{153}{64} \end{pmatrix}}.$$

III 1. $Ax = b$ équivaut à $(D-E)x - Fx = b$, soit, en composant à gauche par $(D-E)^{-1}$, à $\boxed{x - Gx = (D-E)^{-1}b}$. D'autre part, avec $M = D - E$ et $N = F$, on a $G = M^{-1}N$ et $u^{(k+1)} = Gu^{(k)} + (D-E)^{-1}b$ avec, d'après ce que l'on vient de voir, $(D-E)^{-1}b = x - Gx$. Donc $u^{(k+1)} = Gu^{(k)} + x - Gx$, soit $u^{(k+1)} - u^{(k)} = Gu^{(k)} - u^{(k)} + x - Gx$ et on a bien

$$\boxed{u^{(k+1)} - u^{(k)} = -(I-G)(u^{(k)} - x).}$$

2. On a alors $u^{(k)} - x = -(I-G)^{-1}(u^{(k+1)} - u^{(k)})$ et

$$\|u^{(k)} - x\| = \|(I-G)^{-1}(u^{(k+1)} - u^{(k)})\| \le \|\!|(I-G)^{-1}|\!\|\ \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|.$$

Ainsi, on part d'un $u^{(0)}$ quelconque et on calcule les $u^{(k)}$ et $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|$ jusqu'à avoir $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \dfrac{10^{-3}}{\|\!|(I-G)^{-1}|\!\|}$.

3. $D - E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ donc

$$G = (D-E)^{-1}F = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $I - G = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$ et $(I-G)^{-1} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ d'où, avec la définition $\|\!|A|\!\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$, on en déduit $\boxed{\|\!|(I-G)^{-1}|\!\|_\infty = \dfrac{17}{13}}$.

$\boxed{\text{MI0B16Y : Analyse numérique matricielle}}$

$\boxed{\textbf{Corrigé du CONTROLE 1 (09.10.08)}}$

$\boxed{\mathbf{1.}}$ On a $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 = \det \Delta_2$ donc La matrice A n'admet pas de décomposition LU. [*1 point*]

? Si oui, la donner, sinon trouver P facile à inverser, L et U telles que $PA = LU$. A-t-on unicité de cette décomposition si on impose aux coefficients diagonaux de L d'être tous égaux à 1 ?

Soit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$. Le coefficient $\tilde{a}_{22}$ étant nul, on va permuter la deuxième et la troisième ligne, c'est-à-dire multiplier à gauche par $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $PE_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = U$, donc $E_1A = PU$, $A = L_1PU$ et $PA = PL_1PU$ avec $PL_1P = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$. [*2 points*]

La décomposition n'est pas unique car si $P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $P'A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P'A$ admet une décomposition LU car $\det \Delta_k \neq 0$ pour $1 \leq k \leq 3$. [*0,5 point*]

$\boxed{\mathbf{2.}}$ a) $A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -8 & -6 \\ -4 & 4 & 15 & 2 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$E_1A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -10 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$E_2E_1A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.[*3,5 points*]

b) On a alors $\det A = \det L \times \det U = \det U = (-1) \times 2 \times 3 \times (-1)$, soit $\boxed{\det A = 6}$. [*1 point*]

c) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{x}_1 & = & -13 \\ \tilde{x}_2 & = & 9 \\ -3\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 & = & 34 \\ 4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 & = & -19 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = -13 \\ \tilde{x}_2 = 9 \\ \tilde{x}_3 = 34 - 39 - 9 = -14 \\ \tilde{x}_4 = -19 + 52 - 18 - 14 = 1 \end{array} \right.$$

→ <u>Système $Ux = \tilde{x}$:</u>

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & & & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -13 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\ & & & & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -14 \\ & & & & & & -x_4 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = -1 \\ x_3 = -3 \\ x_2 = 5 \\ x_1 = -2 \end{array}\right.$$

donc $\boxed{x = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}$. [*2 points*]

MI0B16Y : Analyse numérique matricielle

Corrigé du CONTROLE 2 (16.10.08)

---

1. Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \quad ; \qquad {}^tB = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} & b_{4,1} \\ 0 & b_{2,2} & b_{3,2} & b_{4,2} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & b_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,4} \end{pmatrix}$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_{1,1}^2 = 1 &\Rightarrow b_{1,1} = 1 \\ b_{1,1} \times b_{2,1} = 2 &\Rightarrow b_{2,1} = 2 \\ b_{1,1} \times b_{3,1} = 3 &\Rightarrow b_{3,1} = 3 \\ b_{1,1} \times b_{4,1} = 4 &\Rightarrow b_{4,1} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 5 = 4 + b_{2,2}^2 &\Rightarrow b_{2,2} = 1 \\ b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = 1 &\Rightarrow b_{3,2} = 1 - 6 = -5 \\ b_{2,1} \times b_{4,1} + b_{2,2} \times b_{4,2} = 10 &\Rightarrow b_{4,2} = 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 35 &\Rightarrow b_{3,3} = \sqrt{35 - 9 - 25} = 1 \\ b_{3,1}b_{4,1} + b_{3,2}b_{4,2} + b_{3,3}b_{4,3} = 5 &\Rightarrow b_{4,3} = 5 - 12 + 10 = 3 \end{aligned}$$

$$b_{4,1}^2 + b_{4,2}^2 + b_{4,3}^2 + b_{4,4}^2 = 45 \Rightarrow b_{4,4} = \sqrt{45 - 16 - 4 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$. [*3 points*]

---

2. $\rightarrow$ <u>$1^{\text{ère}}$ étape</u> : Posons $a_1 = {}^t\begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Alors,

- $\| a_1 \|_2 = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$ et $e^{i\alpha_1} = -1$;
- $v_1 = a_1 + \|a_1\| e_1 = {}^t\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2\,{}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; [*1 point*]
- $H_1 = I_3 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} (2\ 1\ -3)}{(2\ 1\ 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}} = I_3 - \dfrac{2}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

  [*2 points*]

- $H_1A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -19 \\ 2 & 6 & 15 \\ -6 & 3 & -10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -49 & 0 & -147 \\ 0 & 49 & 98 \\ 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$,

  soit $H_1A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -21 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. [*1,5 points*]

→ <u>2$^{\text{ème}}$ étape :</u> Posons $H_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $H_2H_1A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = R$.

[1 point]

Alors $H_1A = H_2R$, puis $A = H_1H_2R = QR$ avec $Q = H_1H_2 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

[*1,5 points*]

Vérification : $QR = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -19 \\ 2 & 6 & 15 \\ 6 & 3 & -10 \end{pmatrix} = A$.

MI0B16Y : Analyse numérique matricielle

Corrigé du PARTIEL du 06.11.08

I 1. $M = \dfrac{1}{\omega}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \omega & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \dfrac{1}{\omega}\begin{pmatrix} 2(1-\omega) & \omega \\ 0 & 2(1-\omega) \end{pmatrix}$ donc

$M^{-1} = \dfrac{\omega}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\omega & 2 \end{pmatrix}$ et $\boxed{R_\omega = M^{-1}N = \begin{pmatrix} (1-\omega) & \omega/2 \\ -\omega(1-\omega)/2 & -\omega^2/4+(1-\omega) \end{pmatrix}}$.

2. On sait déjà que la méthode ne peut converger que si $\omega \in]0\,;\,2[$. On a $\chi_{R_\omega}(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + d$ où $t = \mathrm{tr}R_\omega = -\dfrac{\omega^2}{4} + 2(1-\omega) = -1/4(\omega^2+8\omega-8)$ et $d = \det R_\omega = (1-\omega)^2$. On a alors $\Delta = t^2 - 4d = \dfrac{\omega^4}{16} - \omega^2(1-\omega)$, soit $\boxed{\Delta = \dfrac{\omega^2}{16}(\omega^2+16\omega-16)}$.

• <u>Si $\omega^2+16\omega-16<0$</u>, on a 2 valeurs propres complexes conjuguées $\lambda = \dfrac{1}{2}(t \pm i\sqrt{-\Delta})$ avec $|\lambda|^2 = \dfrac{1}{4}(t^2-\Delta) = d = (1-\omega)^2$.

Comme $\Delta = \dfrac{\omega^2}{16}((\omega+8)^2-80) = \dfrac{\omega^2}{16}(\omega-\sqrt{80}+8)(\omega+\sqrt{80}+8)$, $\Delta<0$ entre les racines et comme ici on prend $\omega \in]0\,;\,2[$, cela est réalisé pour $\omega \in]0\,;\,\omega_0[$ où $\omega_0 = \sqrt{80}-8 \approx 0,94$ et dans ce cas, $\boxed{\rho_\omega = 1-\omega}$.

• <u>Si $\omega^2+16\omega-16 \geq 0$</u>, on a 2 valeurs propres réelles (éventuellement confondues) $\lambda = \dfrac{1}{2}(t \pm \sqrt{\Delta})$ avec $\lambda_1\lambda_2 = d \geq 0$ donc 2 valeurs propres de même signe, qui est celui de $t = -\dfrac{1}{4}((\omega+4)^2-24) = -\dfrac{1}{4}(\omega-\sqrt{24}+4)(\omega+\sqrt{24}+4)$ avec $\sqrt{24}-4 \approx 0,9$ donc, sur $]\sqrt{80}-8\,;\,2[$, les 2 valeurs propres sont négatives et $\rho_\omega = -\min(\lambda_i) = -\dfrac{1}{2}(t-\sqrt{\Delta})$, soit finalement, $\boxed{\rho_\omega = \dfrac{1}{8}(\omega^2+8\omega-8) + \dfrac{\omega}{8}\sqrt{\omega^2+16\omega-16}}$.

Ainsi, ρ_ω est d'abord une fonction affine décroissante sur $]0;\omega_0[$ égale à $1-\omega$, avec un minimum en ω_0, puis une fonction croissante sur $[\omega_0;2[$ avec $\rho_{\omega_0} = 1-\omega_0 \approx 0,06$, $\rho_1 = \dfrac{1}{4}$ et $\rho_2 > 1$. Il existe donc $\omega_1 \in]1;2[$ tel que $\rho_{\omega_1} = 1$. La méthode n'est donc convergente que pour $\omega \in]0;\omega_1[$ et $\boxed{\text{elle est optimale pour } \omega_0 = \sqrt{80}-8, \text{ avec } \rho_{\omega_0} = 9-\sqrt{80} \approx 0,06}$.

II 1. $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -1/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 7/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 6/7 \end{pmatrix}$.

Pour résoudre $Ax = LUx = b$, on résout d'abord $Ly = b$ puis $Ux = y$. On trouve $y = {}^t\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 3/4 & 6/7 \end{pmatrix}$, puis $\boxed{x = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. La matrice A est à diagonale strictement dominante (le terme diagonal de chaque ligne est supérieur à la somme des valeurs absolues des autres termes de la ligne, soit

$1 > 1/4 + 1/4$) donc, d'après le résultat vu à l'exercice 6 du chapitre 3, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel convergent.

3. $M = I$ et $N = I - A$ donc $J = I^{-1}(I - A) = I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + I^{-1}b = Jx^{(k)} + b$. On a donc, avec $\boxed{x^{(0)} = 0}$, $\boxed{x^{(1)} = b}$, $x^{(2)} = Jb + b$ avec $Jb = \frac{1}{2}b$, soit $x^{(2)} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) b$ et $x^{(3)} = \frac{1}{2}x^{(2)} + b = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) b$, soit $\boxed{x^{(2)} = \frac{3}{4} \times 2b}$ et $\boxed{x^{(3)} = \frac{7}{8} \times 2b}$.

Par récurrence, si $x^{(k)} = 2b\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$, alors

$$x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + b = b\left(1 - \frac{1}{2^k} + 1\right) = b\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2b\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

On a donc bien $x^{(k)} = 2b\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ pour tout k. On a alors $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = 2b = x^*$ (on retrouve la solution trouvée au 1.) et $\boxed{x^{(k)} = \frac{2^k - 1}{2^k} x^* = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) x^*}$.

4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $G = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$.

On a alors $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + M^{-1}b$ avec $M^{-1}b = 1/2c + 3/4d$, $Gc = 0$ et $Gd = 1/2c + 1/4d$. On en déduit $\boxed{x^{(0)} = 0}$, $\boxed{x^{(1)} = 1/2c + 3/4d}$, $x^{(2)} = 3/8c + 3/16d + 1/2c + 3/4d$, soit $\boxed{x^{(2)} = 7/8c + 15/16d}$ et $x^{(2)} = 15/32c + 15/64d + 1/2c + 3/4d$ soit $\boxed{x^{(3)} = 31/32c + 63/64d}$.

Par récurrence, si $x^{(k)} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) c + \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) d$, alors

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= Gx^{(k)} + M^{-1}b \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)(1/2c + 1/4d) + 1/2c + 3/4d \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2}\right) c + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{2k+2}} + \frac{3}{4}\right) d \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right) c + \left(1 - \frac{1}{2^{2k+2}}\right) d \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{x^{(k)} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) c + \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) d}$ pour tout $k \geq 1$.

5. Par la méthode de Jacobi $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty = \dfrac{1}{2^k}\|x^*\|_\infty = \dfrac{1}{2^k}$ et par la méthode de Gauss-Siedel, $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty = \dfrac{1}{2^{2k-1}}$ car $x^* = c + d$. C'est donc la méthode de Gauss-Siedel qui converge le plus vite.

III 1. On a $x^{(k+1)} = (D-F)^{-1}\left[E(D-E)^{-1}(Fx^{(k)} + b) + b\right] = Bx^{(k)} + c$ avec $c = (D-F)^{-1}(E(D-E)^{-1}b + b)$ et $\boxed{B = (D-F)^{-1}E(D-E)^{-1}F}$.

2. On a $Bv = \lambda v$, soit $E(D-E)^{-1}Fv = \lambda(D-F)v$. Pour éliminer $(D-E)^{-1}$, on écrit $E = (E-D) + D$, ce qui donne $D(D-E)^{-1}Fv = \lambda\, Dv + (1-\lambda)Fv$, puis $(D-E)^{-1}Fv = \lambda v + (1-\lambda)D^{-1}Fv$ et enfin $Fv = \lambda\,(D-E)v + (1-\lambda)(Fv - ED^{-1}Fv)$, soit, avec $A = D - E - F$, $\boxed{\lambda Av + (\lambda - 1)ED^{-1}Fv = 0}$.

3. ${}^t(ED^{-1}F) = {}^tF\,{}^t(D^{-1})\,{}^tE = ED^{-1}F$ car ${}^tA = A$ donne ${}^tD = D$, ${}^tE = F$ et ${}^tF = E$, donc $\boxed{ED^{-1}F \text{ est symétrique}}$. De plus ${}^txED^{-1}Fx = {}^tx\,{}^tFD^{-1}Fx = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}} y_i^2$ où $y_i = (Fx)_i$. Comme $a_{ii} = {}^te_iAe_i > 0$ et $y_i^2 \geq 0$ pour tout i, on a bien ${}^txED^{-1}Fx \geq 0$ et $\boxed{ED^{-1}F \text{ est bien positive}}$.

4. En composant à gauche la relation de la question 2 par ${}^tv$, on a

$$\lambda\,{}^tvAv = (1-\lambda)\,{}^tvED^{-1}Fv.$$

${}^tvAv > 0$ donc $\lambda = 1$ est impossible. De plus, comme on a aussi ${}^tvED^{-1}Fv \geq 0$, λ et $1-\lambda$ sont de même signe, soit $\lambda(1-\lambda) \geq 0$ et $\boxed{\lambda \in [0,1[}$.
Or $\rho(B) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ valeur propre de } B\}$ donc $\boxed{\rho(B) < 1 \text{ et la méthode converge bien}}$.

MI0B16X : Analyse numérique matricielle

Corrigé du CONTROLE 1 (12.10.09)

---

1. La multiplication à gauche de A par la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ permet d'échanger les lignes 1 et 3 de A, puis la multiplication à gauche par la matrice $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ permet de soustraire la 1-ère ligne à la deuxième. Finalement, $C = BA$ avec $B = E_1 P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. [*2,5 points*]

---

2. a) $A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & -1 & 2 & -3 \\ -8 & 5 & -8 & 7 \\ 12 & -9 & 12 & -8 \\ -16 & 13 & -16 & 8 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{3} & -4 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & -8 & -4 \end{pmatrix} \;;\; E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\; L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\; L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$.[*3 points*]

b) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} \tilde{x}_1 & & & & = & -2 \\ -\,2\tilde{x}_1 & +\,\tilde{x}_2 & & & = & -4 \\ 3\tilde{x}_1 & -\,2\tilde{x}_2 & +\,\tilde{x}_3 & & = & 5 \\ -\,4\tilde{x}_1 & +\,3\tilde{x}_2 & -\,2\tilde{x}_3 & +\,\tilde{x}_4 & = & -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = -2 \\ \tilde{x}_2 = -8 \\ \tilde{x}_3 = 5 + 6 - 16 = -5 \\ \tilde{x}_4 = -5 - 8 + 24 - 10 = 1 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 4x_1 & -\,x_2 & +\,2x_3 & -\,3x_4 & = & -2 \\ & 3x_2 & -\,4x_3 & +\,x_4 & = & -8 \\ & & -\,2x_3 & +\,3x_4 & = & -5 \\ & & & -x_4 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = -2 \end{array}\right.$$

donc $\boxed{x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$. [*2 points*]

$\boxed{\textbf{3.}}$

$$H(v) = I_3 - 2\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}(2\ \ -3\ \ 4)}{(2\ \ -3\ \ 4)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}} = I_3 - \frac{2}{29}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ -6 & 9 & -12 \\ 8 & -12 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{pmatrix}.$$

[*2,5 points*]

MI0B16X : Analyse numérique matricielle

Corrigé du CONTROLE 2 (19.10.09)

---

1. $\rightarrow$ <u>$1^{\text{ère}}$ étape</u> : Posons $a_1 = {}^t(1,1,0)$. Alors,

- $\| a_1 \|_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $e^{i\alpha_1} = 1$;
- $v_1 = a_1 - \|a_1\| e_1 = {}^t(1-\sqrt{2},1,0)$; [*0,5 point*]
- $$H_1 = I_3 - 2\frac{\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1-\sqrt{2},1,0)}{(1-\sqrt{2},1,0)\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = I_3 - \frac{2}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & 0 \\ -1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ [\textit{1,5 points}]}$$

- $$H_1 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ [\textit{1 point}]}$$

$\rightarrow$ <u>$2^{\text{ème}}$ étape</u> : Posons $a_2 = {}^t(\sqrt{2},3)$. Alors,

- $\| a_2 \|_2 = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}$ et $e^{i\alpha_2} = 1$;
- $v_2 = {}^t(\sqrt{2}-\sqrt{11},3)$; [*0,5 point*]
- $$\tilde{H}_2 = I_2 - 2\frac{\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{11} \\ 3 \end{pmatrix}(\sqrt{2}-\sqrt{11},3)}{(\sqrt{2}-\sqrt{11},3)\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{11} \\ 3 \end{pmatrix}} = I_2 - \frac{2}{22-2\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 13-2\sqrt{22} & 3(\sqrt{2}-\sqrt{11}) \\ 3(\sqrt{2}-\sqrt{11}) & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11-\sqrt{22}}\begin{pmatrix} \sqrt{22}-2 & 3(\sqrt{11}-\sqrt{2}) \\ 3(\sqrt{11}-\sqrt{2}) & 2-\sqrt{22} \end{pmatrix} \text{ et } H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} ; \text{ [\textit{1 point}]}$$

$$H_2H_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{11} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}, \text{ soit,}$$

$$\text{avec } H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \boxed{R = H_3H_2H_1A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{11} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}} ; \text{ [\textit{1 point}]}$$

et $Q=(H_3H_2H_1)^{-1}=H_1^{-1}H_2^{-1}H_3^{-1}=H_1H_2H_3$ avec

$$H_1H_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{3}{\sqrt{22}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}$$

donc $\boxed{Q=H_1H_2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{3}{\sqrt{22}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}}$. [*1 point*]

$\boxed{\textbf{2.}}$ Posons

$$B'=\begin{pmatrix}b_{1,1} & 0 & 0\\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0\\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3}\end{pmatrix}\quad;\qquad {}^tB'=\begin{pmatrix}b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1}\\ 0 & b_{2,2} & b_{3,2}\\ 0 & 0 & b_{3,3}\end{pmatrix}$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned}b_{1,1}^2=4 &\quad\Rightarrow\quad b_{1,1}=2\\ b_{1,1}\times b_{2,1}=-2 &\quad\Rightarrow\quad b_{2,1}=-1\\ b_{1,1}\times b_{3,1}=0 &\quad\Rightarrow\quad b_{3,1}=0\\ \\ b_{2,1}^2+b_{2,2}^2=5=1+b_{2,2}^2 &\quad\Rightarrow\quad b_{2,2}=2\\ b_{2,1}\times b_{3,1}+b_{2,2}\times b_{3,2}=0 &\quad\Rightarrow\quad b_{3,2}=0\\ b_{3,1}^2+b_{3,2}^2+b_{3,3}^2=1 &\quad\Rightarrow\quad b_{3,3}=1\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{B'=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.}$ [*2 points*]

On remarque que $B={}^tB'$. On a immédiatement $\boxed{\|B\|_\infty=2}$, $\|B\|_1=2+1+2+1$, soit $\boxed{\|B\|_1=6}$, $\|B\|_2=\sqrt{4+1+4+1}$, soit $\boxed{\|B\|_2=\sqrt{10}}$; $|||B|||_1=\max(2;3;1)$ et $|||B|||_\infty=\max(3;2;1)$, soit $\boxed{|||B|||_1=|||B|||_\infty=3}$ [*2,5 points*] et $|||B|||_2=\sqrt{\rho({}^tBB)}=\sqrt{\rho(C)}$ avec

$$\det(C-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(4-\lambda)(5-\lambda)-4]=(1-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+16)$$

ce qui donne $\lambda=1$, ou $\lambda=\dfrac{9\pm\sqrt{17}}{2}$ donc $\boxed{\rho(C)=|||B|||_2=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{17}}{2}}}$. [*1 point*].

$\boxed{\text{MI0B16X : Analyse numérique matricielle}}$

$\boxed{\text{Corrigé du PARTIEL du 02.11.09 (2heures)}}$

$\boxed{\mathbf{I}}$ 1. a) $\det A = 1+0+0-\alpha^2-0+1 = 2-\alpha^2$ donc A est inversible pour $\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On fait d'abord $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow \alpha L_1 \end{matrix}$: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{\alpha}{2} L_2$ donne $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} = U$.

Finalement, $A = LU$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \dfrac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\alpha^2}{2}x \end{pmatrix}$.

c) On fait d'abord apparaître des 0 sur la dernière colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}_1$$

puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 2-\alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = L$ donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et c'est bien le résultat demandé.

d) Résoudre $Ax = b$ pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $b = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Déterminer les matrices de Jacobi J et de Gauss-Siedel G associées à A.

b) Calculer les rayons spectraux de J et de G et les comparer.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de α ces deux méthodes convergent-elles ?

d) Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $b = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer les trois premières itérations de chacune des deux méthodes précédentes en partant de $x^{(0)} = 0$.

3. On considère maintenant la méthode itérative, dite de Jacobi relaxée, où $A = M-N$ avec $M = \dfrac{1}{\omega}D$ (ω réel et D diagonale de A) et on pose $J_\omega = M^{-1}N$.

a) Écrire, dans le cas général, J_ω à l'aide de J, ω et I. Que vaut J_1 ?

b) Exprimer les valeurs propres de J_ω en fonction de celles de J.

c) Déterminer, selon ω et α, les cas de convergence de cette nouvelle méthode.

II Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont toutes réelles, strictement positives classées comme suit : $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. On étudie une méthode itérative de résolution du système linéaire $Ax = b$, qu'on définit à partir d'une constante $r > 0$ et d'un vecteur $x^{(0)}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + r(b - Ax^{(k)}).$$

On notera x^* la solution de système $Ax = b$.

1. On a $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0$ donc en particulier $\neq 0$ donc A est inversible et $Ax = b$ admet l'unique solution $\boxed{x^* = A^{-1}b}$.

2. On a $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + r(b - Ax^{(k)}) \\ x^* = x^* + r(b - Ax^*) \end{cases}$. En soustrayant ces deux égalités, on obtient : $x^{(k+1)} - x^* = x^{(k)} - x^* - rA(x^{(k)} - x^*) = (I - rA)(x^{(k)} - x^*)$, puis, par une récurrence immédiate, $\boxed{x^{(k)} - x^* = (I - rA)^k(x^{(0)} - x^*)}$.

3. Si $Ax = \lambda x$, alors $(I - rA)x = x - r\lambda x = (1 - \lambda r)x$ donc les valeurs propres de $I - rA$ sont les $\boxed{\mu_i = 1 - r\lambda_i}$.

4. On a $\rho(I - rA) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |1 - r\lambda_i|$ avec $1 - r\lambda_n \leq \cdots \leq 1 - r\lambda_1$.

• Si $1 - r\lambda_n > 0$, c'est-à-dire $r < \dfrac{1}{\lambda_n}$, alors $\rho = 1 - r\lambda_1$.

• Si $1 - r\lambda_n \leq 0$, alors $\rho = \max(1 - r\lambda_1, \lambda_n r - 1)$.

6. On a $\rho < 1$ si $|1 - r\lambda_1| < 1$ et $|r\lambda_n - 1| < 1$.

La première inégalité donne $-1 < 1 - r\lambda_1 < 1$, soit $r\lambda_1 > 0$ qui est toujours vérifiée et $r\lambda_1 < 2$ qui n'est vérifiée que dans le cas $r < \dfrac{2}{\lambda_1}$ mais on est ici dans le cas $r < \dfrac{1}{\lambda_1}$.

La deuxième inégalité donne $\lambda_n r - 1 < 1$, soit $\lambda_n r < 2$ et $r < \dfrac{2}{\lambda_n}$ si $r > \dfrac{1}{\lambda_n}$.

Dans tous les cas, on doit donc avoir $\boxed{r < 2/\lambda_n}$.

7. $r \mapsto 1 - r\lambda_1$ décroît et $r \mapsto \lambda_n r - 1$ croît. La valeur optimale de r (qui donne le rayon spectral minimal) est donc lorsque $1 - r\lambda_1 = \lambda_n r - 1$, soit pour $\boxed{r = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}}$.