

CONTROLE 1 (07.02.07)

1. Soit $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -e_{n,1} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -e_{3,2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & -e_{n,2} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer L_1^{-1} , L_2^{-1} et $L_1 L_2$. A-t-on $L_1 L_2 = L_2 L_1$?

2. a) Effectuer la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & -5 \\ 24 & -12 & 41 & -39 \\ -27 & 18 & -62 & 54 \\ 9 & 14 & 15 & -47 \end{pmatrix}$$

b) Calculer le déterminant de A .

c) Résoudre $Ax = b$ où ${}^t b = \begin{pmatrix} 3 & 17 & -35 & 6 \end{pmatrix}$.

CONTROLE 2 (28.02.07)

1. Énoncer, avec précision mais sans le démontrer, le théorème de décomposition de Choleski.

2. a) Effectuer la factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$[\textit{Résultat intermédiaire : } H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} .]$$

PARTIEL (21.03.07)

Durée : 2 heures

1. Réaliser la décomposition de Cholesky, puis la décomposition LU de la matrice A où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & -5 & 14 & -14 \\ -1 & 5 & -14 & 30 \end{pmatrix}.$$

Résoudre ensuite $Ax = b$ où $b = {}^t \begin{pmatrix} -2 & 6 & -15 & 47 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que, pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, la méthode de Gauss-Seidel converge alors que la méthode de Jacobi diverge.

3. Soit $A(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \beta & & (\gamma) \\ & \ddots & \\ (\alpha) & & \beta \end{pmatrix}$, $U = A(1, 1, 1)$ et $u = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1) On considère dans cette question $\gamma = \alpha$ et $\beta \neq 0$.

a) Déterminer Uu . En déduire les valeurs propres de U et leurs espaces propres associés.

b) Écrire $A(\alpha, \beta, \alpha)$ à l'aide de I et U . En déduire que les valeurs propres de $A(\alpha, \beta, \alpha)$ sont $\beta - \alpha$ et $\beta + (n - 1)\alpha$.

c) Soit J la matrice intervenant dans la méthode de Jacobi. Montrer que $J = A \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\beta}, 0, -\frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}$. En déduire que la méthode de Jacobi converge pour $|\beta| > (n - 1)|\alpha|$.

2) a) Montrer que, si $\gamma \neq \alpha$, $\det A(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha(\beta - \gamma)^n - \gamma(\beta - \alpha)^n}{\alpha - \gamma}$.

[On pourra remarquer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout t , $\det(A + tU) = \det A + tK$, puis on remplacera t par $-\gamma$ et $-\alpha$ pour trouver $\det A$.]

b) Si $\gamma = \alpha$, et $G = M^{-1}N$ la matrice qui intervient dans la méthode de Gauss-Seidel, vérifier que $M\lambda - N = A(\lambda\alpha, \lambda\beta, \alpha)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de G est

$$P_G(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda \left(\lambda - \frac{\alpha}{\beta} \right)^n - \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)^n \lambda^n}{\lambda - 1}.$$

Montrer alors que 0 est valeur propre de G et que le produit des valeurs propres non nulles de G vaut $-\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P_G(\lambda)}{\lambda}$, c'est-à-dire $\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ et en déduire que pour $|\alpha| \geq |\beta|$, la méthode de Gauss-Seidel ne converge pas.

CONTROLE 1 (04.09.07)

1. Soit $E_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_\alpha E_\beta$, $E_\beta E_\alpha$ et leurs inverses.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Donner l'opération matricielle qui permet de permuter la première et la quatrième ligne de A .

3. a) Effectuer la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Calculer le déterminant de A .

c) Résoudre ensuite $Ax = b$ où $b = {}^t(0 \ 2 \ 2 \ 0)$.

[*Bonus*] Résoudre $A^2u = b$.

CONTROLE 2 (18.10.07)

1. On donne la décomposition LU d'une matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Déduire de cette décomposition, la décomposition de Cholesky.

2. Effectuer la factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

PARTIEL du 08.11.07

Durée : 2 heures

I On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$.

Calcul préliminaire : Écrire le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & b & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle définie positive ?
2. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle à diagonale strictement dominante ?
3. Pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
4. Pour quelles valeurs de α la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

II Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence double que $\det A_n = n + 1$ pour tout $n \geq 2$.
2. Écrire sans gros calculs les décompositions LU et de Cholesky de la matrice A_n .
3. On prend ici $n = 4$ et $b = {}^t(19 \ 19 \ -3 \ -12)$.
 - a) En utilisant 1., résoudre $A_4x = b$.
 - b) En partant de $u^{(0)} = 0_{\mathbb{R}^4}$, calculer les deux premières itérations de la méthode de Jacobi, puis celles de la méthode de Gauss-Seidel.

III Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ solution de $Ax = b$. Si $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit une méthode itérative par la donnée d'une suite $(u^{(k)})$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ avec $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $Mu^{(k+1)} = Nu^{(k)} + b$. En écrivant $A = D - E - F$, on pose $G = (D - E)^{-1}F$.

1. En partant de $Ax = b$, montrer que $(D - E)^{-1}b = x - Gx$ et en déduire que

$$u^{(k+1)} - u^{(k)} = -(I - G)(u^{(k)} - x).$$

2. En déduire que $\|u^{(k)} - x\| \leq \|(I - G)^{-1}\| \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|$ et donner la démarche pour avoir $\|u^{(k)} - x\| < 10^{-3}$.

3. Pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer G et $\|(I - G)^{-1}\|_\infty$.

CONTROLE 1 (09.10.08)

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ admet-elle une décomposition LU ? Si oui, la donner, sinon trouver P facile à inverser, L et U telles que $PA = LU$. A-t-on unicité de cette décomposition si on impose aux coefficients diagonaux de L d'être tous égaux à 1 ?

2. a) Effectuer la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -8 & -6 \\ -4 & 4 & 15 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Calculer le déterminant de A .

c) Résoudre $Ax = b$ où ${}^tb = \begin{pmatrix} -13 & 9 & 34 & -19 \end{pmatrix}$.

CONTROLE 2 (16.10.08)

1. Réaliser la factorisation de Cholesky de la matrice A où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

2. Effectuer la factorisation QR de la matrice A où :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -19 \\ 2 & 6 & 15 \\ -6 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

I On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la décomposition $A = M - N$ où $M = \frac{1}{\omega} D - E$ et $N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) D + F$ et déterminer $R_\omega = M^{-1}N$. (Les notations sont celles du cours)
2. Déterminer le rayon spectral ρ_ω de R_ω et donner l'allure de son graphe en fonction de ω sur $]0, 2[$. [On distinguera 2 cas suivant le signe de $\omega^2 + 16\omega - 16$].
3. Quelle valeur de ω doit-on choisir pour optimiser la méthode ?

II Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Faire la factorisation LU de A et résoudre $Ax = b$ où ${}^t b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on cherche à résoudre $Ax = b$ en utilisant les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Siedel.

2. Montrer rapidement que ces 2 méthodes convergent [utiliser un résultat vu en cours dans un exercice].
3. Écrire la matrice de Jacobi J associée à A et les 4 premières itérations de la méthode de Jacobi en partant de $x^{(0)} = 0$. Montrer que $x^{(k)} = \frac{2^k - 1}{2^k} x^*$, où x^* est la solution exacte du système.
4. Écrire la matrice de Gauss-Siedel G associée à A et les 4 premières itérations de la méthode de Gauss-Siedel en partant de $x^{(0)} = 0$. Montrer que $x^{(k)} = \frac{2^{2k-1} - 1}{2^{2k-1}} c + \frac{2^{2k} - 1}{2^{2k}} d$, où ${}^t c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^t d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ pour les 2 méthodes précédentes. Que peut-on en conclure ?

III Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n , symétrique, définie positive, décomposée en $A = D - E - F$ avec les notations du cours. On étudie la méthode itérative de résolution du système $Ax = b$ définie par :

$$\begin{cases} (D - E)x^{(k+1/2)} &= Fx^{(k)} + b \\ (D - F)x^{(k+1)} &= Ex^{(k+1/2)} + b \end{cases}.$$

1. Écrire le vecteur $x^{(k+1)}$ sous la forme $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$.
2. Montrer que, si λ est valeur propre de B et v un vecteur propre associé, alors

$$\lambda Av + (\lambda - 1)ED^{-1}Fv = 0.$$

3. Montrer que $ED^{-1}F$ est symétrique positive. [On montrera que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t x ED^{-1}Fx \geq 0$ après avoir remarqué que $a_{ii} = {}^t e_i A e_i > 0$ pour tout i].
- 4 Dédire des questions précédentes que $\lambda \in [0, 1[$, puis que la méthode converge.