USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Analyse numérique
$2^{\text{ème}}$ année Lic Maths

Série d'exercices n° 2 : Interpolation polynômiale

(À faire en TD les exercices 1 et 6 et les autres exercices sont supplémentaires)

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

Utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange avec $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ pour obtenir une approximation des valeurs $f(2)$ et $f(2.4)$. Donner l'erreur relative pour chaque approximation.

Exercice 2 : La contrainte de cisaillement en kilo Pascal dans une strate d'argile varie avec la profondeur h en mètre. Utiliser les mesures expérimentales ci-contre pour évaluer τ à $h = 4.5m$ en utilisant le polynôme d'interpolation sous forme de Lagrange.

$h\,(m)$	2	3	5	7
$\tau\,(kPa)$	18	35	75	163

Exercice 3 : Utiliser le polynôme d'interpolation sous forme de Newton et les valeurs $\sin 0$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$ pour évaluer $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Donner le polynôme sous la forme de Horner. Comparer avec la solution exacte.

Exercice 4 : Le tableau suivant fournit les valeurs mesurées de la densité d'eau de mer $\rho\,(kg/m^3)$ en fonction de la température T (degrés Celsius). Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton et utiliser le pour évaluer la densité pour une température $T = 10^0C$.

$T\,(^0C)$	4	8	12	16	20
$\rho\,(kg/m^3)$	1000.7794	1000.6427	1000.2805	999.7165	998.9700

Exercice 5 : Utiliser un polynôme de degré 2 pour approximer la fonction $f(x) = \ln(x+1)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Les noeuds d'interpolation sont $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, et $x_2 = 1$.

Estimer l'erreur faite en approximant $f(0.3)$ par $P_2(0.3)$. Comparer avec l'erreur exacte.

Exercice 6 : Soit $f \in \mathcal{C}^4([-2,4])$ telle que $f(-2) = -14, f(-1) = -\frac{11}{4}, f(2) = -8$ et $f(4) = -29$.

(1) Calculer le polynôme d'interpolation de f aux points $-2, -1, 2$ et 4 sur $[-2,4]$ en utilisant

(a) un système linéaire **(b)** la formule de Lagrange **(c)** la formule de Newton.

(2) **(a)** Donner une approximation de $f(0), f(1)$ et $f(3)$.

(b) Étudier l'erreur d'interpolation en ces points sachant que $\left|f^{(4)}\right| \leq 10^{-2}$ sur $[-2,4]$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sin(\pi x) + \cos(\pi x), x \in I = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

1. On considère le polynôme p d'interpolation associé à f aux noeuds $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

   a) Calculer p puis l'ordonner suivant les puissances décroissantes de x.

   b) Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $\varepsilon_1(x) = f(x) - p(x)$ puis montrer qu'on a

$$\max |\varepsilon_1(x)| \leq \frac{\pi^3}{576\sqrt{3}} \simeq 0.031.$$

2. On considère le polynôme q d'interpolation associé à f aux noeuds $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

   a) Calculer le polynôme q d'interpolation de f en ces quatre points et l'ordonner suivant les puissances décroissantes de x.

   b) Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $\varepsilon_2(x) = f(x) - q(x)$ et montrer qu'on a

$$\max |\varepsilon_2(x)| \leq \frac{\sqrt{2}\pi^4}{31104} \simeq 0.0044.$$

Exercice 8 : Soient $f(x) = |x|$ et soient

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2} \text{ et } x_4 = 1.$$

(a) Déterminer le polynôme p de $\mathcal{P}_2$ qui réalise la meilleure approximation de f au sens des moindres carrés, où $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2.

(b) Vérifier que $q(x) = \frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^4$ est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_i, i = 0, \cdots, 4$.

(c) Dans un même repère, tracer les graphes de f, p et q sur $[-1, 1]$. Commenter.

Solution de l'exercice 1 :

Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'interpolation $(x_i, f(x_i)), i = 0, \cdots, n$ est de degré n et s'écrit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x) \quad \text{où} \quad \ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ici $n = 2$ et les points d'interpolation sont donnés par

i	0	1	2
x_i	0	1	3
$f(x_i)$	$2\sin(0) = 0$	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$	$2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Déterminons donc le polynôme de Lagrange de degré 2, qui s'écrit

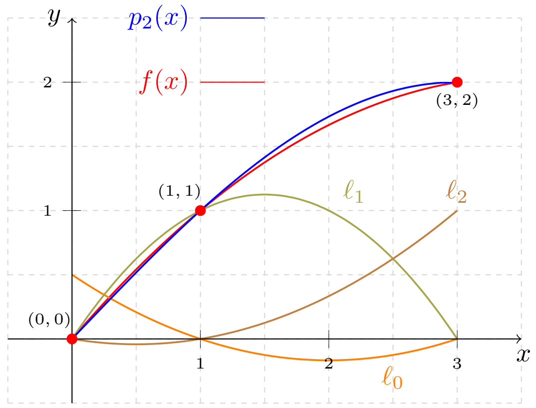
$$p_2(x) = f(x_0)\,\ell_0(x) + f(x_1)\,\ell_1(x) + f(x_2)\,\ell_2(x) = \ell_1(x) + 2\ell_2(x),$$

avec

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{3}(x-1)(x-3),$$
$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -\frac{1}{2}x(x-3),$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{6}x(x-1).$$

Finalement

$$p_2(x) = -\frac{1}{2}x(x-3) + \frac{1}{3}x(x-1) = \frac{1}{6}x(7-x).$$



On obtient alors les approximations suivantes.

$$f(2) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \simeq p_2(2) = \frac{1}{6}(2)(7-2) = \frac{5}{3} = 1.666\,666\,6\ldots,$$
$$f(2.4) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \simeq p_2(2.4) = \frac{1}{6}(2.4)(7-2.4) = 1.84 \quad .$$

Calcul d'erreur : On rappelle que si x^* est une approximation de x, alors

$$E_r(x^*) = \frac{E_a(x^*)}{|x|} \quad \text{avec} \quad E_a(x^*) = |x - x^*|.$$

On a

$$E_a(2) = |f(2) - p_2(2)| = \left|2\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{5}{3}\right| = 0.065\,384\,141,$$

$$E_a(2.4) = |f(2.4) - p_2(2.4)| = \left|2\sin\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) - 1.84\right| = 0.062\,113\,033.$$

Alors

$$E_r(2) = \frac{E_a(2)}{|f(2)|} = \frac{0.065\,384\,141}{1.732\,050\,8} = 3.77\%,$$
$$E_r(2.4) = \frac{E_a(2.4)}{|f(2.4)|} = \frac{0.062\,113\,033}{1.84} = 3.37\%.$$

Solution de l'exercice 6 :

1) Calcul du polynôme d'interpolation de f aux points

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	2	4
$f(x_i)$	-14	$-\frac{11}{4}$	-8	-29

en utilisant :

a) un système linéaire (la matrice de Vandermonde).

On a quatre points donc $n = 3$ et p_n est un polynôme de degré 3, qui s'écrit sous la forme

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Écrivons explicitement $p_3(x_i) = f(x_i)\,, i = 0, 1, 2, 3.$

$$\begin{cases} -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0 = -14, \\ -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = -\frac{11}{4}, \\ 8x^3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = -8, \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = -29. \end{cases}$$

La forme matricielle de ce système est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -14 \\ -\frac{11}{4} \\ -8 \\ -29 \end{pmatrix}}_{b}.$$

En calculant le déterminant de la matrice A on trouve $\det A = 720 \neq 0$. Donc on peut utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système $AX = b$.

La solution est alors donnée par

$$a_0 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} -14 & -2 & 4 & -8 \\ -\frac{11}{4} & -1 & 1 & -1 \\ -8 & 2 & 4 & 8 \\ -29 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = \frac{720}{720} = 1,$$

$$a_1 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & -14 & 4 & -8 \\ 1 & -\frac{11}{4} & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 4 & 8 \\ 1 & -29 & 16 & 64 \end{vmatrix} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -14 & -8 \\ 1 & -1 & -\frac{11}{4} & -1 \\ 1 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & 4 & -29 & 64 \end{vmatrix} = \frac{-2160}{720} = -3,$$

$$a_3 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -14 \\ 1 & -1 & 1 & -\frac{11}{4} \\ 1 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 4 & 16 & -29 \end{vmatrix} = \frac{180}{720} = \frac{1}{4}.$$

Le polynôme d'interpolation en utilisant un système linéaire est donc donné par

$$p_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

b) la formule de Lagrange.

Le polynôme de Lagrange de degré 3 s'écrit

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\,\ell_i(x) \quad \text{avec} \quad \ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(x_0)\,\ell_0(x) + f(x_1)\,\ell_1(x) + f(x_2)\,\ell_2(x) + f(x_3)\,\ell_3(x) \\ &= -14\ell_0(x) - \frac{11}{4}\ell_1(x) - 8\ell_2(x) - 29\ell_3(x), \end{aligned}$$

avec

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{-1}{24}(x+1)(x-2)(x-4),$$
$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{15}(x+2)(x-2)(x-4),$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{-1}{24}(x+2)(x+1)(x-4),$$
$$\ell_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{60}(x+2)(x+1)(x-2).$$

Finalement

$$\begin{aligned} p_3(x) = \; & \tfrac{14}{24}(x+1)(x-2)(x-4) - \tfrac{11}{60}(x+2)(x-2)(x-4) \\ & + \tfrac{1}{3}(x+2)(x+1)(x-4) - \tfrac{29}{60}(x+2)(x+1)(x-2) \\ = \; & \tfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

c) la formule de Newton

On rappelle que le polynôme d'interpolation sous la forme de Newton passant par les points $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, \cdots, n\}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} p_n(x) = \; & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ & + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}), \end{aligned}$$

où $f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ sont la diagonale de la table des différences divisées d'ordres successifs $0, 1, 2, \cdots, n$ de la fonction f aux points $x_i, i = 0, \cdots, n$.

La table de différences divisées pour les points $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, 3, 4$ est

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-2	$\boxed{-14}$			
-1	$-\frac{11}{4}$	$\boxed{\frac{45}{4}}$		
2	-8	$-\frac{7}{4}$	$\boxed{-\frac{13}{4}}$	
4	-29	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$

Suivant la formule de Newton, le polynôme interpolant les points $(-2, -14)$, $\left(-1, -\frac{11}{4}\right)$, $(2, -8)$ et $(4, -29)$ est

$$p_3(x) = -14 + \frac{45}{4}(x+2) - \frac{13}{4}(x+2)(x+1) + \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-2) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

2)

a) Calcul des approximation de $f(0), f(1)$ et $f(3)$. On a

$$f(0) \simeq p_3(0) = 1,$$
$$f(1) \simeq p_3(1) = -\frac{5}{4},$$
$$f(3) \simeq p_3(3) = -\frac{71}{4}.$$

b) Étude de l'erreur d'interpolation sachant que $\left|f^{(4)}\right| \leq 10^{-2}$ sur $[-2, 4]$.

L'erreur théorique sur cette interpolation est donnée au point x par

$$\begin{aligned} E_3(x) = f(x) - p_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}(x+2)(x+1)(x-2)(x-4), \end{aligned}$$

Elle vérifie

$$\begin{aligned} |E_3(x)| &\leq |(x+2)(x+1)(x-2)(x-4)| \frac{\max_{-2 \leq x \leq 4} \left|f^{(4)}(4)\right|}{24} \\ &\leq |(x+2)(x+1)(x-2)(x-4)| \frac{10^{-2}}{24}. \end{aligned}$$

Il vient alors

$$|E_3(0)| \leq (16)\frac{10^{-2}}{24} = \frac{1}{150},$$
$$|E_3(1)| \leq (18)\frac{10^{-2}}{24} = \frac{3}{400},$$
$$|E_3(3)| \leq (20)\frac{10^{-2}}{24} = \frac{1}{120}.$$

Solution de l'exercice 7 :

1.

a) Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'interpolation $(x_i, f(x_i)), i = 0, \cdots, n$ est de degré n et s'écrit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_i(x) \quad \text{où} \quad \ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ici $n = 2$ et les points d'interpolation sont donnés par

i	0	1	2
x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	$\sin(0) + \cos(0) = 1$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Déterminons donc le polynôme de Lagrange de degré 2, qui s'écrit

$$p(x) = f(x_0)\,\ell_0(x) + f(x_1)\,\ell_1(x) + f(x_2)\,\ell_2(x) = \ell_1(x) + 2\ell_2(x),$$

avec

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right), \\
\ell_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -16x\left(x - \frac{1}{2}\right), \\
\ell_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = 8x\left(x - \frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
p(x) &= 8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - 16\sqrt{2}x\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8x\left(x - \frac{1}{4}\right) \\
&= -16\left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 + 8\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 1.
\end{aligned}$$

b) L'erreur théorique sur cette interpolation est donnée au point x par

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(x) = f(x) - p(x) &= \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad \xi_x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\
&= \frac{f'''(\xi_x)}{6} x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Comme

$$f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}\left(\sin(\pi x) + \cos(\pi x)\right) = -\pi^3\cos(\pi x) + \pi^3\sin(\pi x),$$

alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(x) &= \frac{\pi^3}{6}\left(\sin(\pi\xi_x) - \cos(\pi\xi_x)\right)x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{4}\right) \\
&= \frac{\pi^3}{6}\left(\sin(\pi\xi_x) - \cos(\pi\xi_x)\right)\left(x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x\right).
\end{aligned}$$

On pose $h_1(\xi) = \sin(\pi\xi) - \cos(\pi\xi)$. On a $h_1'(\xi) = \pi\cos(\pi\xi) + \pi\sin(\pi\xi) \geq 0$ si $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors la fonction h est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et donc

$$|h_1(\xi)| = |\sin(\pi\xi) - \cos(\pi\xi)| \leq \max\left(|h_1(0)|, \left|h_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|\right) = \max(|-1|, |1|) = 1.$$

De même on pose $g_1(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x,\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On a $g_1'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{8} = 0$ implique $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\sqrt{3}$ ou $x = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{3}$. Alors

$$\begin{aligned}
|g_1(x)| &= \left|x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x\right| \\
&\leq \max\left(\left|g_1\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12}\sqrt{3}\right)\right|, \left|g_1\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\sqrt{3}\right)\right|, |g_1(0)|, \left|g_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|\right) \\
&= \max\left(\left|-\tfrac{\sqrt{3}}{288}\right|, \left|\tfrac{\sqrt{3}}{288}\right|, 0, 0\right) \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{288}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_1(x)| &= \frac{\pi^3}{6}\left|\sin(\pi\xi_x) - \cos(\pi\xi_x)\right|\left|x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x\right| \\
&\leq \frac{\pi^3}{6} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{288} = \frac{\pi^3}{576\sqrt{3}} \simeq 0.031.
\end{aligned}$$

2.

a) Calculons cette fois-ci le polynôme d'interpolation par la formule de Newton.

On rappelle que le polynôme d'interpolation sous la forme de Newton passant par les points $\{(x_i, f(x_i)), i = 0, \cdots, n\}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
q_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),
\end{aligned}$$

où $f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ sont la diagonale de la table des différences divisées d'ordres successifs $0, 1, 2, \cdots, n$ de la fonction f aux points $x_i, i = 0, \cdots, n$.

La table de différences divisées pour les points

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	$\sin 0 + \cos 0 = 1$	$\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$

est

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	$\boxed{1}$			
$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\boxed{3\left(\sqrt{3}-1\right)}$		
$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	0	$\boxed{-9\left(\sqrt{3}-1\right)}$	
$\frac{1}{2}$	1	$-3\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-9\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\boxed{0}$

Suivant la formule de Newton, le polynôme interpolant les points $(0,1)$, $\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2},1\right)$ est

$$\begin{aligned} q(x) &= 1+3\left(\sqrt{3}-1\right)x-9\left(\sqrt{3}-1\right)x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)+0\times x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right) \\ &= \left(9-9\sqrt{3}\right)x^2+\left(\frac{9}{2}\sqrt{3}-\frac{9}{2}\right)x+1. \end{aligned}$$

b) L'erreur théorique sur cette interpolation est donnée au point x par

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(x) = f(x)-q(x) &= \frac{f''''(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \quad \xi_x\in\,]0,1[\\ &= \frac{f''''(\xi_x)}{24}x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Comme

$$f''''(x)=\frac{d^4}{dx^4}\left(\sin(\pi x)+\cos(\pi x)\right)=\pi^4\left(\cos(\pi x)+\sin(\pi x)\right),$$

alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(x) &= \tfrac{\pi^4}{24}\left(\cos(\pi\xi_x)+\sin(\pi\xi_x)\right)x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) \\ &= \tfrac{\pi^4}{24}\left(\cos(\pi\xi_x)+\sin(\pi\xi_x)\right)\left(x^4-x^3+\tfrac{11}{36}x^2-\tfrac{1}{36}x\right). \end{aligned}$$

On pose $h_2(\xi)=\cos(\pi\xi)+\sin(\pi\xi)$, $\xi\in[0,1]$. On a $h_2'(\xi)=-\pi\sin(\pi\xi)+\pi\cos(\pi\xi)=0$ implique $\xi=\frac{1}{4}$. Alors

$$\begin{aligned} |h_2(\xi)| &= |\cos(\pi\xi)+\sin(\pi\xi)| \\ &\le \max\left(|h(0)|,\left|h\left(\tfrac{1}{4}\right)\right|,|h(1)|\right) \\ &= \max\left(|1|,\left|\sqrt{2}\right|,|-1|\right)=\sqrt{2}. \end{aligned}$$

De même on pose $g_2(x)=x^4-x^3+\frac{11}{36}x^2-\frac{1}{36}x$, $x\in[0,1]$. On a $g_2'(x)=4x^3-3x^2+\frac{11}{18}x-\frac{1}{36}$. Pour résoudre $g_2'(x)=0$, on observe que $\alpha_1=\frac{1}{4}$ est une racine, donc

$$g_2'(x)=\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(4x^2-2x+\tfrac{1}{9}\right).$$

Les deux autre racines sont alors

$$\alpha_2 = \tfrac{3+\sqrt{5}}{12} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \tfrac{3-\sqrt{5}}{12}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left|g_2\left(x\right)\right| &= \left|x^4 - \tfrac{3}{2}x^3 + \tfrac{5}{9}x^2 - \tfrac{1}{18}x\right| \\
&\leq \max\left(\left|g_2\left(\alpha_1\right)\right|, \left|g_2\left(\alpha_2\right)\right|, \left|g_2\left(\alpha_3\right)\right|, \left|g_2\left(0\right)\right|, \left|g_2\left(1\right)\right|\right) \\
&= \max\left(\left|\tfrac{1}{2304}\right|, \left|-\tfrac{1}{1296}\right|, \left|-\tfrac{1}{1296}\right|, 0, 0\right) \\
&= \tfrac{1}{1296}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon_2\left(x\right)\right| &= \tfrac{\pi^4}{24}\left|\cos\left(\pi\xi_x\right) + \sin\left(\pi\xi_x\right)\right|\left|x^4 - x^3 + \tfrac{11}{36}x^2 - \tfrac{1}{36}x\right| \\
&\leq \tfrac{\pi^4}{24} \times \sqrt{2} \times \tfrac{1}{1296} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}\pi^4}{31104} \simeq 0.0044.
\end{aligned}$$