USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Analyse numérique
2$^{\text{ème}}$ année Lic Maths

Série d'exercices n° 4 : Intégration numérique

Exercice 1 :

Calculer $\text{Arctg}\,(3)$ par les méthodes d'intégration des trapèzes et de Simpson pour $n = 6$.

Indication : $\text{Arctg}\,(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Puis calculer l'erreur relative dans chaque cas.

Exercice 2 :

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération a :

t en s	0	10	20	30	40	50	60	70	80
a en m/s^2	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80\ s$, par la méthode des trapèzes puis par Simpson.

Exercice 3 :

Déterminer le nombre de subdivisions nécessaires des intervalles d'intégration pour évaluer à 0.5×10^{-6} près, les intégrales suivantes par la méthode indiquée.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$ Simpson. **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ trapèzes.

Exercice 4 :

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}dx$ par la formule des rectangles à gauche, à droite et avec point au milieu, en décomposant l'intervalle d'intégration en dix parties. Estimer puis calculer l'erreur commise.

Exercice 5 :

Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $[-1, 1]$. Notons par p le polynôme de degré deux qui interpole f en les points $-1, 0$ et 1.

a) Exprimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} p\,(x)\,dx$ en fonction de $f\,(-1)$, $f\,(0)$ et $f\,(1)$.

b) Vérifier que l'expression obtenue coïncide avec une formule d'intégration numérique dont on donnera le nom et la valeur du pas de discrétisation.

Solution de l'exercice 1 :

On a d'après l'indication $\text{Arctg}\,(3) = \int_0^3 \frac{1}{1+x^2}dx$. Donc $a = 0, b = 3, n = 6, h = \dfrac{b-a}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Alors on a le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{1+x_i^2}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{1}{10}$

Calculons $\text{Arctg}\,(3) = \int_0^3 \frac{1}{1+x^2}dx$ par les méthodes des trapèzes et de Simpson. On a

$$\begin{aligned} T_6(f) &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{5} f(x_i) + f(b)\right] = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left[1 + 2\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{4}{13}+\frac{1}{5}+\frac{4}{29}\right)+\frac{1}{10}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[1+\frac{1467}{377}+\frac{1}{10}\right] = \frac{18817}{15080} \simeq 1.2478117, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_6(f) &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1, i \text{ pair}}^{5} f(x_i) + 4\sum_{i=1, i \text{ impair}}^{5} f(x_i) + f(b)\right] \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{3}\left[1 + 2\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}\right) + 4\left(\tfrac{4}{5}+\tfrac{4}{13}+\tfrac{4}{29}\right) + \frac{1}{10}\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[1+\frac{7}{5}+\frac{9392}{1885}+\frac{1}{10}\right] = \frac{9403}{7540} \simeq 1.2470822. \end{aligned}$$

Pour l'erreur commise, on a $\text{Arctg}\,3 = 1.2490458$

$$\begin{aligned} E_r(T_6) &= \frac{|I(f) - T_6(f)|}{|I(f)|} = \frac{|\text{Arctg}\,(3) - 1.2478117|}{|\text{Arctg}\,(3)|} = \frac{|1.2490458 - 1.2478117|}{1.2490458} \\ &= \frac{0.0012341}{1.2490458} \simeq 9.8803423 \times 10^{-4} \simeq 0.099\% \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_r(S_6) &= \frac{|I(f) - S_6(f)|}{|I(f)|} = \frac{|\text{Arctg}\,(3) - 1.2470822|}{|\text{Arctg}\,(3)|} = \frac{|1.2490458 - 1.2470822|}{1.2490458} \\ &= \frac{0.0019636}{1.2490458} \simeq 1.5720801 \times 10^{-3} \simeq 0.157\% \,. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 :

On sait que l'accélération a est la dérivée de la vitesse V, donc

$$V(t) = V(0) + \int_0^t a(s)\,ds.$$

Ce qui implique que

$$V(80) = 0 + \int_0^{80} a(s)\,ds.$$

Calculons $I = V(80)$ par la méthode des trapèzes. Ici, d'après le tableau des valeurs, $h = 10$.

$$\begin{aligned} V(80) \simeq T = \frac{h}{2}\left(a(0) + 2\sum_{i=1}^{7} a(s_i) + a(80)\right) \\ &= 5\Big(30 + 2\Big(31.63 + 33.44 + 35.47 + 37.75 + 40.33 + 43.29 + 46.70\Big) + 50.67\Big) \\ &= 3089.45 \ m/s. \end{aligned}$$

Calculons $V(80)$ par la méthode de Simpson

$$\begin{aligned} V(80) \simeq S &= \frac{h}{3}\left(a(s_0) + a(s_n) + 2\sum_{i \text{ pair}} a(s_i) + 4\sum_{i \text{ impair}} a(s_i)\right) \\ &= \frac{10}{3}\Big(30 + 50.67 + 2\Big(33.44 + 37.75 + 43.29\Big) + 4\Big(31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70\Big)\Big) \\ &\simeq 3087.17 \ m/s. \end{aligned}$$

<u>Solution de l'exercice 3</u> :

a) Soit

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx.$$

Le pas d'intégration est

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

D'autre part l'erreur théorique sur la méthode de Simpson est donnée par

$$\begin{aligned} |E(h)| &\leq \frac{b-a}{180} h^4 \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| \\ &\leq \frac{2\pi}{180}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \qquad \text{car} \quad \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\cos x| \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi pour que $|E(h)| \leq 0.5 \times 10^{-6}$ il suffit que n vérifie

$$\frac{2\pi}{180}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \leq 0.5 \times 10^{-6}.$$

Donc

$$n^4 \geq \frac{2\pi}{180}\frac{2^4\pi^4}{0.5 \times 10^{-6}} \simeq 1.0880700 \times 10^8$$

Ainsi n vérifie

$$n \geq \sqrt[4]{1.0880700 \times 10^8} \simeq 102.132\,56.$$

On prendra par exemple $n = 104$, car pour la méthode de Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ doit toujours être pair.

b) Soit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx.$$

Le pas d'intégration est

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}.$$

D'autre part l'erreur théorique sur la méthode des trapèzes est donnée par

$$\begin{aligned} |E(h)| &\leq \frac{b-a}{12} h^2 \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \\ &\leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(e\frac{e-1}{(e+1)^3}\right) \end{aligned}$$

car

$$\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| e^x \frac{e^x-1}{(e^x+1)^3} \right| \leq e\frac{e-1}{(e+1)^3}.$$

Ainsi pour que $|E(h)| \leq 0.5 \times 10^{-6}$ il suffit que n vérifie

$$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(e\frac{e-1}{(e+1)^3}\right) \leq 0.5 \times 10^{-6}.$$

Ce qui implique que

$$n \geq \sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{0.5\times 10^{-6}}\right)\left(e\frac{e-1}{(e+1)^3}\right)} \simeq 123.05673.$$

On prend par exemple $n = 124$.

<u>Solution de l'exercice 4</u> :

On a $a = 1, b = 2, n = 10, h = \dfrac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}, x_i = a + ih = 1 + \frac{i}{10}, 0 \leq i \leq 10$ et $f(x) = \sqrt{x}$.

Alors on a les tableaux suivants :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i = \frac{10+i}{10}$	1	$\frac{11}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{14}{10}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{19}{10}$	2
$f(x_i) = \sqrt{x_i}$	1	$\sqrt{\frac{11}{10}}$	$\sqrt{\frac{12}{10}}$	$\sqrt{\frac{13}{10}}$	$\sqrt{\frac{14}{10}}$	$\sqrt{\frac{15}{10}}$	$\sqrt{\frac{16}{10}}$	$\sqrt{\frac{17}{10}}$	$\sqrt{\frac{18}{10}}$	$\sqrt{\frac{19}{10}}$	$\sqrt{2}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{x_{i-1}+x_i}{2} = \frac{19+2i}{20}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{23}{20}$	$\frac{25}{20}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{29}{20}$	$\frac{31}{20}$	$\frac{33}{20}$	$\frac{35}{20}$	$\frac{37}{20}$	$\frac{39}{20}$
$f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$	$\sqrt{\frac{21}{20}}$	$\sqrt{\frac{23}{20}}$	$\sqrt{\frac{25}{20}}$	$\sqrt{\frac{27}{20}}$	$\sqrt{\frac{29}{20}}$	$\sqrt{\frac{31}{20}}$	$\sqrt{\frac{33}{20}}$	$\sqrt{\frac{35}{20}}$	$\sqrt{\frac{37}{20}}$	$\sqrt{\frac{39}{20}}$

Pour l'approximation de l'intégrale on a

- rectangles à gauche $R_g = h\sum_{i=1}^{10} f(x_{i-1}) = \frac{1}{10}\left(1 + \sqrt{\frac{11}{10}} + \cdots + \sqrt{\frac{19}{10}}\right) \simeq 1.1981187.$
- rectangles à droite $R_d = h\sum_{i=1}^{10} f(x_i) = \frac{1}{10}\left(\sqrt{\frac{11}{10}} + \cdots + \sqrt{\frac{19}{10}} + \sqrt{2}\right) \simeq 1.\,2395401.$
- rectangles avec point au milieu $R_m = h\sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = \frac{1}{10}\left(\sqrt{\frac{21}{20}} + \sqrt{\frac{23}{20}} + \cdots + \sqrt{\frac{39}{20}}\right) \simeq 1.2190124.$

Pour l'estimation de l'erreur commise on a

$$|E_a(R_g)| \leq \frac{b-a}{2} h \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|, \qquad |E_a(R_d)| \leq \frac{b-a}{2} h \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|,$$

$$|E_a(R_m)| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

On a $f(x) = \sqrt{x}, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$ donc

$$\sup_{x\in[1,2]} |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[1,2]} |f''(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

Ce qui implique

$$|E_a(R_g)| \leq \frac{1}{40} = 0.025, \quad |E_a(R_d)| \leq \frac{1}{40} \quad \text{et} \quad |E_a(R_m)| \leq \frac{1}{9600} \simeq 1.0416667 \times 10^{-4}.$$

La valeur exacte de l'intégrale est

$$I(f) = \int_1^2 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \simeq 1.2189514.$$

L'erreur absolue commise est donc

$$|E_a(R_g)| \simeq |1.2189514 - 1.1981187| = 0.0208327 \leq 0.025,$$

$$|E_a(R_d)| \simeq |1.2189514 - 1.\,2395401| = 0.0205887 \leq 0.025,$$

$$|E_a(R_m)| \simeq |1.2189514 - 1.2190124| = 0.0000610 \leq \frac{1}{9600}.$$

Solution de l'exercice 5 :

a) On pose $x_0 = -1, x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Les polynômes auxiliaires de Lagrange associés sont

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}x(x-1),$$
$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = -(x+1)(x-1),$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{1}{2}x(x+1).$$

L'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$\begin{aligned} f(x) \simeq p(x) &= f(x_0)\,\ell_0(x) + f(x_1)\,\ell_1(x) + f(x_2)\,\ell_2(x) \\ &= \frac{1}{2}x(x-1)\,f(-1) - (x+1)(x-1)\,f(0) + \frac{1}{2}x(x+1)\,f(1). \end{aligned}$$

On intègre le polynôme p sur l'intervalle $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\simeq \int_{-1}^{1} p(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}f(-1)\int_{-1}^{1} x(x-1)\,dx - f(0)\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx + \frac{1}{2}f(1)\int_{-1}^{1} x(x+1)\,dx \\ &= \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1). \end{aligned}$$

b) L'expression obtenue est la formule d'intégration de Simpson avec $h = 1$ et $n = 2$.