USTHB 2020-2021 Semestre 1 | **Analyse numérique**
Faculté de Mathématiques | **2$^{\text{ème}}$ année Lic Maths**

Test n^{0}1 - 10 février 2021. Durée : 45 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/15

Exercice 1 (9 pts.) : Soit $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

a) Déterminer le polynôme d'interpolation de f aux points $0, 1, 2$ et 3 sur $[0, 3]$ en utilisant

(1) la formule de Lagrange **(2)** la formule de Newton.

b) Donner une approximation de $f\left(\frac{3}{2}\right)$. Calculer l'erreur relative pour cette approximation.

Réponse.

a) Les points d'interpolation sont les points (x_i, y_i) avec $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$. On obtient alors le tableau de données ci-contre.

x_i	0	1	2	3
$y_i = f(x_i) = \frac{1}{1+x_i}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Il y a quatre points, donc $n = 3$ et le polynôme d'interpolation est de degré 3.

(1) Le polynôme d'interpolation par la formule de Lagrange

On a $p_3(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) + y_3\ell_3(x)$, où $\ell_i(x) = \prod\limits_{k=0, k\neq i}^{3} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$.

Calculons les polynômes ℓ_i : On a $\ell_0(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$.

De même $\ell_1(x) = \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$, $\ell_2(x) = -\frac{1}{2}(x-0)(x-1)(x-3)$,

et $\ell_3(x) = \frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2)$.

Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Lagrange est $p_3(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$

$+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}x(x-2)(x-3) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)x(x-1)(x-3) + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$

$= -\frac{1}{24}x^3 + \frac{7}{24}x^2 - \frac{3}{4}x + 1.$

(2) Le polynôme d'interpolation par la formule de Newton

Le polynôme de Newton est $p_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$.

Les coefficients du polynôme de Newton sont obtenus à partir du tableau des différences divisées ci-contre.

x_i	y_i	DD1	DD2	DD3
0	1			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$		
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{-1}{24}$

Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Newton est

$p_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x(x-1) - \frac{1}{24}x(x-1)(x-2) = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{7}{24}x^2 - \frac{3}{4}x + 1.$

b) Approximation de $f\left(\frac{3}{2}\right)$:

$f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq p_3\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right) = \frac{25}{64} \simeq 0.39063.$

Pour l'erreur relative on a $E_r\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left|f\left(\frac{3}{2}\right) - p_3\left(\frac{3}{2}\right)\right|}{\left|f\left(\frac{3}{2}\right)\right|} = \frac{\left|\frac{2}{5} - \frac{25}{64}\right|}{\left|\frac{2}{5}\right|} = \frac{\frac{3}{320}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{128} \simeq 0.023438 \simeq 2.34\%.$

<u>Exercice 2 (6 points)</u> : Soit $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

On choisit le pas $h = \frac{1}{2}$.

Approcher $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées.

Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

Réponse.

Approximation de $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Formule de différences progressives :

$$f_p'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow f_p'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Formule de différences régressives :

$$f_r'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \longrightarrow f_r'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Formule de différences centrées :

$$f_c'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \longrightarrow f_c'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

La dérivée de f est $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, alors la valeur exacte de $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ est $-\dfrac{4}{9}$.

Pour l'erreur commise, on a

$$\begin{aligned}
E_r(prog.) &= \frac{\left|f'\left(\frac{1}{2}\right) - f_p'\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|} = \frac{\left|-\frac{4}{9} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right|}{\left|-\frac{4}{9}\right|} = \frac{1}{4} = 25\%, \\
E_r(reg.) &= \frac{\left|f'\left(\frac{1}{2}\right) - f_r'\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|} = \frac{\left|-\frac{4}{9} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right|}{\left|-\frac{4}{9}\right|} = \frac{1}{2} = 50\%, \\
E_r(cent.) &= \frac{\left|f'\left(\frac{1}{2}\right) - f_c'\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|} = \frac{\left|-\frac{4}{9} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|-\frac{4}{9}\right|} = \frac{1}{8} = 12.50\%.
\end{aligned}$$