Corrigé des exercices du chapitre 1 : Rappels et compléments sur les matrices

Exercice 1 : Diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

La somme des colonnes est constante donc, avec $\sum C_i \to C_1$,

$$\chi_A(\lambda) = (a+b-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & -\lambda & b \\ 1 & b & -\lambda \end{vmatrix} = (a+b-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -a-\lambda & 0 \\ 0 & b-a & -\lambda-b \end{vmatrix} = (a+b-\lambda)(b+\lambda)(a+\lambda).$$

Notons que cette propriété sur la somme des colonnes assure aussi que $(1,1,1)$ est vecteur propre pour $a+b$.

- Si $a = b = 0$, $A = 0$.
- Si $a = b \neq 0$, $2a$ est valeur propre simple et $-a$ est valeur propre double. On a $A + aI_3 = a(1)$ qui est de rang 1, donc la multiplicité de $-a$ est égale à $\dim E(a, A)$, soit 2, et, comme c'est aussi le cas pour $2a$ qui est simple, on en déduit que A est diagonalisable.
- Si $b = -2a \neq 0$, $-a$ est valeur propre double et $2a$ est simple.

$$A + 2aI_3 = \begin{pmatrix} a & a & -2a \\ a & a & -2a \\ a & -2a & a \end{pmatrix}$$

est de rang 2, donc A n'est pas diagonalisable, et elle ne l'est pas non plus si $a = -2b \neq 0$.

- Dans les autres cas, A a trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\lambda = 1$ est valeur propre de A et trouver une matrice orthogonale O telle que $O^{-1}AO = T$ soit triangulaire.

$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: cette matrice est de rang 1 donc 1 est bien valeur propre de A et $\dim E_1(A) = 2$. L'hyperplan $E_1(A)$ a pour équation : $x + 2y + z = 0$ et on peut donc trouver rapidement dans $E_1(A)$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux ε_1 et ε_2.

On prend par exemple, $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose alors $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. La matrice O est bien orthogonale, car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée (la base canonique

(e_1, e_2, e_3)) dans une autre (la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$). Pour avoir $O^{-1}AO$, il suffira alors de déterminer $A\varepsilon_1$, $A\varepsilon_2$ et $A\varepsilon_3$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On a déjà $A\varepsilon_1 = \varepsilon_1$ et $A\varepsilon_2 = \varepsilon_2$ car ε_1 et ε_2 sont dans $E_1(A)$. On est donc assuré que $O^{-1}AO$ est triangulaire et il suffit de déterminer $A\varepsilon_3$.

On remarque que la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 5, ce qui permet de conclure que 5 est aussi valeur propre. La matrice A est donc diagonalisable (mais pas dans une base orthonormée, car elle n'est pas symétrique). On peut ainsi en déduire que troisième coefficient diagonal de T vaut 5. On a alors :

$$A\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 5\varepsilon_3 + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\varepsilon_3 + \sqrt{2}\varepsilon_2.$$

Ainsi, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Soit A une matrice carrée.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \overline{D}(a_{ii}, \rho_i)$ avec $\rho_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

c) Trouver D diagonale telle que DAD^{-1} soit symétrique. Retrouver l'inversibilité de A.

---

a) Soit $AX = X$ avec $X \neq 0$. On a donc $\sum_j a_{ij}x_j = \lambda x_i$, soit $\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ii})x_i$. Si $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$, alors $|x_{i_0}| > 0$ car $X \neq 0$, et $|\lambda - a_{i_0i_0} = \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0j}| = \rho_{i_0}$. Donc $\lambda \in D'(a_{i_0i_0}, \rho_{i_0})$, soit $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D'(a_{ii}, \rho_i)$.

b) On a $\rho_1 = 2$, $\rho_n = 1$ et $\rho_i = 3$ si $i \in \{2, \cdots, n-1\}$, ainsi que $a_{ii} = 3$ donc $\bigcup_{i=1}^{n} D'(a_{ii}, \rho_i) = D'(3, 3)$, soit $\mathrm{Sp}(A) \subset D'(3, 3)$.

Malheureusement, $O \in D'(3, 3)$ donc cela ne dit pas si A est inversible.

$AX = 0$ équivaut à $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_{j-1} + 3x_j + 2x_{j+1} = 0 \text{ pour } 2 \leq j \leq n-1 \\ x_{n-1} + 3x_n = 0 \end{cases}$. Complètons par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. Alors $x_{j-1} + 3x_j + x_{j+1} = 0$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. Or, puisque $r^3 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$, les suites (y_j) telles que $y_{j-1} + 3y_j + 2y_{j+1} = 0$ pour tout $f \in \mathbb{N}^*$ sont celles de $\mathrm{Vect}((-1)^j, (-2)^j)$. On utilise alors celle qui est telle que $y_j = x_j$ si $j \in \{0, \cdots, n+1\}$, puis $y_{j+1} = -\frac{1}{2}[y_{j-1} + 3y_j]$ si $j \geq n+1$ et elle fournit $x_j = \alpha(-1)^j + \beta(-2)^j$ si $j \in \{0, \cdots, n+1\}$. $x_0 = 0$ donne $\alpha + \beta = 0$ soit $\alpha = -\beta$ puis $x_{n+1} = 0$ donne $\alpha + \beta 2^{n+1} = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$ et $X = 0$, ainsi $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

c) Cherchons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \neq 0$: ainsi $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et

$DA = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 & 2\lambda_1 & & (0) \\ \lambda_2 & 3\lambda_2 & 2\lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & \lambda_n & 3\lambda_n \end{pmatrix}$ puis $DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} & & (0) \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} & 3 \end{pmatrix}$. DAD^{-1} est symétrique si et seulement si $\dfrac{2\lambda_{i-1}}{\lambda_i} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}$ pour tout $i \in \{2, \cdots, n\}$, soit $\lambda_i^2 = 2\lambda_{i-1}^2$. Donc, si on prend $\lambda_i = 2^{\frac{i-1}{2}}$ pour $1 \leq i \leq n$, on a bien cette relation, et $DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & & (0) \\ \sqrt{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{2} \\ (0) & & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique. Cette fois, $\rho_i \in \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$, donc $\mathrm{Sp}A \subset D'(3, 2\sqrt{2})$ et $0 \notin D'(3, 2\sqrt{2})$ car $2\sqrt{2} < 3$.

Bonus. On peut calculer $\mathrm{Sp}(A)$. Soit $P_n(\lambda) = \chi_A(\lambda)$ (A dépend de n). Suivant la première colonne, il vient $P_n(\lambda) = (3-\lambda)P_{n-1}(\lambda) - 2P_{n-2}(\lambda)$. Donc, on retrouve une récurrence linéaire. Si $f(r) = r^2 - (3-\lambda)r + 2$, $\Delta = (3-\lambda)^2$. Dans l'immédiat, on ne regarde que $\lambda \in]3-2\lambda, 3+2\lambda[$ et on pose $\lambda - 3 = -2\sqrt{2}\cos\theta$, $\theta \in]0, \pi[$, donc

$$f(r) = r^2 - 2r\sqrt{2}\cos\theta + 2 = (r - \sqrt{2}e^{i\theta})(r - \sqrt{2}e^{-i\theta})$$

Ainsi, $P_n(\lambda) = (\sqrt{2})^n[\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}] = (\sqrt{2})^n[\gamma\cos(n\theta) + \delta\sin(n\theta)]$.

Or $P_1(\lambda) = 3 - \lambda = 2\sqrt{2}\cos\theta = \sqrt{2}[\gamma\cos\theta + \delta\sin\theta]$ et

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= (3-\lambda)^2 - 2 = 8\cos^2 - 2 = 4(\cos 2\theta + 1) - 2 \\ &= 4\cos 2\theta + 2 = 2(\gamma\cos 2\theta + \delta\sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma\cos\theta + \delta\sin\theta = 2\cos\theta \\ \gamma\cos 2\theta + \delta\sin 2\theta = 2\cos 2\theta + 1 = 4\cos^2\theta - 1 \end{cases}$$

donc $\gamma[2\cos^2\theta - \cos 2\theta] = 4\cos^2\theta - 2\cos 2\theta - 1$, soit $\gamma = 1$, puis $\delta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ donc

$$P_n(\lambda) = (\sqrt{2})^n\left[\cos(n\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta)\right] = (\sqrt{2})^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Pour $\theta \in]0, \pi[$, on a donc $P_n\left(3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right) = 0$ si $1 \leq k \leq n$, d'où les n valeurs propres distinctes. $\lambda_k = 3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. Il n'y en a donc pas d'autres.

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$.

a) Dire tout sur ${}^tAA$, notamment sur ses valeurs propres.

b) Pour λ valeur propre strictement positive de ${}^tAA$, on pose $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Soit alors Σ la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Montrer que $A = V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tU$ avec V et U des matrices orthogonales.

---

a) En identifiant matrices et applications linéaires, et matrices colonnes et vecteurs dans la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

• ${}^tAAX = \lambda X$ implique $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$, donc $\lambda \geq 0$.

• $\ker A \subset \ker {}^tAA$, et, si ${}^tAAX = 0$, $\|AX\|^2 = 0$, donc $AX = 0$, soit $\ker A = \ker {}^tAA$ et $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg}\, {}^tAA = r$.

• ${}^tAA$ est de plus symétrique.

b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale propre pour ${}^tAA$, et telle que $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\ker A = \ker {}^tAA$. ${}^tAAe_i = \lambda_i e_i$, donc $({}^tAAe_i|e_j) = \lambda_i(e_i|e_j)$ donc $(Ae_i|Ae_j) = \lambda_i\delta_{ij}$, et $(\dfrac{Ae_1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{Ae_r}{\sigma_r})$ est une famille orthonormale.

Analyse. si $A = V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tU$, alors ${}^tAA = U\begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tU$, donc U diagonalise ${}^tAA$. Puis $V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AU$, donc, si $(c_1, \ldots, c_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ayant $Uc_i = e_i$ et $\Sigma e_i = \sigma_i e_i$ si $i \leq r$ et 0 si $i > r$, on a $V\Sigma c_i = \sigma_i V c_i = AUc_i = Ae_i$.

Synthèse. On complète $(\dfrac{Ae_1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{Ae_r}{\sigma_r})$ en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$. On définit U par $Uc_i = e_i$, donc U diagonalise ${}^tAA$ et V par $Vc_i = e'_i$. On a bien U et V orthogonales, $V\Sigma c_i = \sigma_i V c_i = Ae_i = AUc_i$ si $i \leq r$ et $AUc_i = 0$ si $i > r$, donc $V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AU$.