Corrigés des exercices du chapitre 3 : Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 : Démonstration du théorème 10.

L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.

- 1) Montrer que $\| \cdot \|_1$ est une norme.
- 2) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que :

$$\text{pour tous } \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 3) En déduire que $\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q$, toujours avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 4) Montrer alors que $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

[On utilisera la relation : $(|u_i| + |v_i|)^p = |u_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} + |v_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1}$]

- $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} = 0$ équivaut à $|v_i|^p = 0$ pour tout i , c'est-à-dire à $v_i = 0$ pour tout i

ou $v = 0$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda v_i|^p \right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|v\|_p.$$

- 1) Pour tous $u, v \in V$, $\|u + v\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i + v_i| \leq \sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|) = \|u\|_1 + \|v\|_1$.

- 2) $\varphi : x \mapsto e^x$ est convexe car $\varphi''(x) = e^x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, l'inégalité est vérifiée de façon évidente.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, posons $x = p \ln \alpha$ et $y = q \ln \beta$. On a alors

$$e^{\frac{1}{p}x + (1-\frac{1}{p})y} \leq \frac{1}{p}e^x + \left(1 - \frac{1}{p}\right)e^y$$

Or $e^{\frac{1}{p}x + (1-\frac{1}{p})y} = e^{\frac{1}{p}x} e^{(1-\frac{1}{p})y} = \alpha\beta$, $e^x = \alpha^p$ et $e^y = \beta^q$.

- 3) Posons, pour $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i = \frac{|u_i|}{\|u\|_p}$ et $\beta_i = \frac{|v_i|}{\|v\|_q}$.

Par 2), $\alpha_i \beta_i \leq \frac{\alpha_i^p}{p} + \frac{\beta_i^q}{q}$ et

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \alpha_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \beta_i^q = \frac{1}{p \|u\|_p^p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q \|v\|_q^q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

donc $\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q$.

3) Posons $A = \sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|)^p$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|)(|u_i| + |v_i|)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^n [|u_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} + |v_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1}] \\ &= \sum_{i=1}^n |u_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |v_i|(|u_i| + |v_i|)^{p-1} \\ &\leq \|u\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|)^{pq-q} \right)^{\frac{1}{q}} + \|v\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|)^{pq-q} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donc $pq - q = p$ et

$$A \leq \|u\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|)^p \right)^{\frac{1}{q}} + \|v\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$A \leq A^{\frac{1}{q}} (\|u\|_p + \|v\|_p)$ donc $A^{1-\frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

Enfin, $\|u + v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n (|u_i| + |v_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

Exercice 2 : Démonstration du théorème 12-i)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\| \cdot \|$ une norme matricielle. Montrer alors $\rho(A) \leq \|A\|$.

Soit $u \neq 0$ tel que $A = \lambda u$ avec $|\lambda| = \rho(A)$.

Soit v tel que $u^t v \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. On a, d'une part,

- $\|A(u^t v)\| \leq \|A\| \|u^t v\|$ (1)
- $\rho(A) \|u^t v\| = |\lambda| \|u^t v\| = \|\lambda u^t v\| = \|(Au)^t v\|$ (2).

En combinant (1) et (2), on a alors $\rho(A) \|u^t v\| \leq \|A\| \|u^t v\|$ et comme $\|u^t v\| \neq 0$, $\rho(A) \leq \|A\|$.

Exercice 3 : Un exemple de norme matricielle non subordonnée

Soit l'application $\| \cdot \|_E : \begin{cases} \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto \|A\|_E = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} \end{cases}$.

- 1) Montrer que $\| \cdot \|_E$ est une norme matricielle et non subordonnée pour $n \geq 2$.
 2) Montrer que $\| \cdot \|_E$ est invariante par transformation unitaire et qu'elle vérifie :

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2 \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}_n.$$

- 1) • $\|A\|_E = 0$ si et seulement si $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 = 0$, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ pour tous i, j .

• $\|\lambda A\|_E = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |\lambda a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |\lambda|^2 |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|A\|_E$

•

$$\begin{aligned} \|A + B\| &\leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} + b_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (|a_{ij}| + |b_{ij}|)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |b_{ij}|^2 \right)^{1/2} \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &= \|A\|_E + \|B\|_E \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \|AB\|_E &= \left(\sum_{i, j} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i, j, k} |a_{ik}|^2 |b_{kj}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i, i', j, j'} |a_{ij}|^2 |b_{i'j'}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i, j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i, j} |b_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|A\|_E \|B\|_E \end{aligned}$$

donc $\| \cdot \|_E$ est bien une norme matricielle.

$\| \cdot \|_E$ n'est pas une norme subordonnée car toute norme subordonnée vérifie $\|I\| = \sup_{\|u\|=1} \|Iu\| =$

1 alors qu'ici $\|I\|_E = n$.

- 2) Montrons que, pour tout $u \in \mathbb{K}^n$, $\|Au\|_2 \leq \|A\|_E \|u\|_2$.

$$\|Au\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} u_k \right)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right) \right] \right)^{1/2} \text{ par Cauchy-Schwarz.}$$

$$\text{Or } \left(\sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right) \right] \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \|u\|_2 \|A\|_E.$$

$$\text{Ainsi, } \|A\|_2 = \sup_{\|u\|_2=1} \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} \leq \|A\|_E.$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A^*A , alors, pour tout i , $\lambda_i \leq \rho(A^*A)$ et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(A^*A) = \|A\|_E^2 \leq n\rho(A^*A) = n\|A\|_2^2$$

donc $\|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2$.

Soit U une matrice unitaire :

$$\|UA\|_E = \sqrt{\text{Tr}(A^*U^*UA)} = \sqrt{\text{Tr}(A^*A)} = \|A\|_E.$$

Exercice 4 : Démonstration du théorème 14

1) Soit $\| \cdot \|$ une norme matricielle, B une matrice telle que $\|B\| < 1$ et I la matrice identité. Montrer alors que :

- a) $I + B$ est inversible.
- b) $\|(I + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$.

2) Montrer que, si $(I + B)$ est singulière, alors $\|B\| \geq 1$ pour toute norme matricielle $\| \cdot \|$.

1) Posons $A = -B$, $\|A\| = \|B\| = 1$.

Par récurrence sur n et parce que la norme $\| \cdot \|$ est matricielle, on a : $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Or, comme $\|A\| < 1$, $\sum_{k \geq 0} \|A\|^k$ converge et $\sum_{k \geq 0} A^k$ est normalement convergente. On pose

$$C = \sum_{k \geq 0} A^k.$$

On a, pour tout $N \geq 0$, $I - A^N = (I - A) \sum_{k=0}^N A^k$. En faisant $N \rightarrow +\infty$, on obtient $I = (I - A)C$ donc $(I - A) = I + B$ est inversible, d'inverse C .

$$\|C\| \leq \sum_{k \geq 0} \| -B \|^k = \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

2) Si $(I + B)$ n'est pas inversible, alors $\|B\| \geq 1$ (c'est la contraposée de 1)).

Exercice 5 : Démonstration du théorème 16.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\| \cdot \|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$ et on note de la même façon la norme matricielle subordonnée.

1) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $B_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$;

- a) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|B_\varepsilon^p\| = 0$.
- b) Montrer que $\rho(A) \leq \|A^p\|^{1/p}$.
- c) En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|A^p\|^{1/p} = \rho(A)$.

2) Montrer que si A est symétrique, $\rho(A) = \|A\|_2$.

1)a) Soit, par le théorème 6, $\| \cdot \|_\varepsilon$ une norme matricielle telle que

$$\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, $\|B_\varepsilon\|_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} \|A\|_\varepsilon \leq \frac{\rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$.

On a donc, par le théorème 9, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_\varepsilon^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_\varepsilon^n\| = 0$.

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Au = \lambda u$.

On a, pour $p \geq 1$, $A^p u = A^{p-1} Au = \lambda A^{p-1} u$ et on montre par récurrence que $A^p u = \lambda^p u$, donc λ^p est valeur propre de A^p . On a donc $|\lambda^p| \leq \rho(A^p)$. Or $|\lambda^p| = |\lambda|^p = \rho(A)^p$ et donc $\rho(A)^p \leq \rho(A^p)$ puis $\rho(A) \leq (\rho(A^p))^{1/p} \leq \|A^p\|^{1/p}$ d'après le théorème 6.

c) $\|B_\varepsilon^p\| = \frac{\|A^p\|}{(\rho(A) + \varepsilon)^p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ donc il existe p_0 tel que, pour tout $p \geq p_0$, $\|A^p\| \leq \varepsilon(\rho(A) + \varepsilon)^p$. On a alors

$$\|A^p\|^p \leq \varepsilon^{1/p}(\rho(A) + \varepsilon)$$

avec $\varepsilon^{1/p}(\rho(A) + \varepsilon) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} (\rho(A) + \varepsilon)$ donc il existe p_1 tel que, pour tout $p \geq p_1$, $\|A^p\|^{1/p} \leq \rho(A) + 2\varepsilon$.

On a donc, pour $p \geq p_1$, $\rho(A) \leq \|A^p\|^{1/p} \leq \rho(A) + 2\varepsilon$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|A^p\|^{1/p} = \rho(A)$.

2) Si A est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée et $A = {}^t O D O$ avec O orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ où l'on suppose $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. $A^2 = {}^t O D O {}^t O D O = {}^t O D^2 O$ où $D^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, qui prouve que $\text{Sp}(A^2) = \{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\}$.

On a alors $\rho(A^2) = |\lambda_1^2| = |\lambda_1|^2 = \rho(A)^2$ (car $|\lambda_1|^2 \geq \dots \geq |\lambda_n|^2$).

Or $\|A\| = \sqrt{\rho({}^t A A)} = \sqrt{\rho(A^2)}$ car A est symétrique, soit $\|A\| = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$.

Exercice 6 :

Soit A une matrice d'ordre $n \geq 2$, inversible et à coefficients réels. On écrit la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M est "facilement inversible" et on s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$. Dans ce but, on introduit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \text{ et } x_{k+1} = M^{-1} N x_k + M^{-1} b.$$

1) Résultats généraux :

a) Montrer que si la suite converge, c'est nécessairement vers la solution de $Ax = b$.

b) Soit $B = M^{-1} N$ et $\rho(B)$ son rayon spectral. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

- i. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ avec $Ax = b$
- ii. $\rho(B) < 1$.

c) Montrer que, s'il existe une norme matricielle subordonnée $\| \cdot \|$ telle que $\|B\| < 1$, alors la méthode itérative ci-dessus est convergente.

2) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie par le choix de $M = D$ avec D matrice diagonale de $A : d_{ii} = a_{ii}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

a) Quel est le nom de cette méthode ?

b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors cette méthode converge.

3) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie pour une matrice M telle que :

$$m_{ij} = 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n \text{ et } m_{ij} = a_{ij} \text{ pour } 1 \leq j \leq i \leq n.$$

a) Quel est le nom de cette méthode ?

b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors cette méthode converge.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; que peut-on dire de la convergence des deux méthodes proposées précédemment ?

1) a) On suppose que (x_k) converge vers x^* . Alors x^* vérifie

$$x^* = M^{-1}Nx^* + M^{-1}b$$

d'où, en composant à gauche par M , $Mx^* = Nx^* + b$, soit $(M - N)x^* = b$, c'est-à-dire $\boxed{Ax^* = b}$.

b) On pose $c = M^{-1}b$. On a alors :

$$x_{k+1} - x^* = (Bx_k + c) - (Bx^* + c) = B(x_k - x^*) = B^2(x_{k-1} - x^*) = \dots = B^{k+1}(x_0 - x^*)$$

donc (x_k) converge vers x^* si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k(x_0 - x^*) = 0$ ce qui équivaut à $\rho(B) < 1$ d'après le théorème 9.

c) Supposons qu'il existe une norme subordonnée $\| \cdot \|$ pour laquelle $\|B\| < 1$, alors, par le théorème 9, $\rho(B) < 1$, ce qui équivaut par 2) à la convergence de (x_k) .

2) a) C'est la méthode de Jacobi.

b) La méthode converge si et seulement si $\rho(D^{-1}(E + F)) < 1$ ou bien si et seulement si il existe une norme matricielle pour laquelle $\|D^{-1}(E + F)\| < 1$.

On pose $J = (J_{ij}) = D^{-1}(E + F)$. Alors :

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

On a donc $\|J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |J_{ij}| < 1$ car A est à diagonale strictement dominante (et pour

tout i , $\frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$) et la méthode converge bien.

3) a) C'est la méthode de Gauss-Seidel.

b) On pose $G = (D - E)^{-1}F$ et on veut montrer que $\rho(G) < 1$. Soit λ une valeur propre de G et $u \neq 0$ tel que $Gu = \lambda u$. $\det(G - \lambda I) = 0$ car $\ker(G - \lambda I) \neq \emptyset$.

Or $\det(G - \lambda I) = 0$ si et seulement si $\det((D - E)(G - \lambda I)) = \det(F - \lambda(D - E)) = 0$.

Théorème de Gershgorin-Hadamard : Soit $D_i = \{\mu \in \mathbb{C} ; |m_{ii} - \mu| \leq \sum_{j \neq i} |m_{ij}|\}$. Alors

$$\text{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Preuve : Soit $\lambda \in \text{sp}(M)$ tel que $Mu = \lambda u$ et $\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|_\infty}$.

$\|\tilde{u}\|_\infty = 1$ donc $|\tilde{u}_k| \leq 1$ pour tout k et il existe k_0 pour lequel $|\tilde{u}_{k_0}| = 1$.

$M\tilde{u} = \lambda\tilde{u}$ équivaut à $\sum_{j=1}^n m_{ij}\tilde{u}_j = \lambda\tilde{u}_i$ pour tout i donc

$$|\lambda\tilde{u}_{k_0} - m_{k_0k_0}\tilde{u}_{k_0}| = \left| \sum_{j \neq k_0} m_{k_0j}\tilde{u}_{k_0} \right| \leq \sum_{j \neq k_0} |m_{k_0j}| \|\tilde{u}\|_\infty \leq \sum_{j \neq k_0} |m_{k_0j}|$$

et comme $|\lambda\tilde{u}_{k_0} - m_{k_0k_0}\tilde{u}_{k_0}| = |\lambda - m_{k_0k_0}| |\tilde{u}_{k_0}| = |\lambda - m_{k_0k_0}|$ on a $|\lambda - m_{k_0k_0}| \leq \sum_{j \neq k_0} |m_{k_0j}|$,

c'est-à-dire que $\lambda \in D_{k_0}$.

Retour à l'exercice : $\lambda(D - E) - F = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Si 0 est valeur propre de $\lambda(D - E) - F$, d'après ce que l'on vient de voir, il existe k pour lequel

$$|\lambda a_{k,k}| \leq \sum_{j < k} |\lambda a_{k,j}| + \sum_{j > k} |a_{k,j}|.$$

Or $|\lambda a_{k,k}| > \sum_{j \neq k} |\lambda a_{k,j}|$ et donc $|\lambda| \sum_{j > k} |a_{k,j}| < \sum_{j > k} |a_{k,j}|$ d'où $|\lambda| < 1$ et $\rho(G) < 1$.

4) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $J = D^{-1}(E + F) = I(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 4 + 4 - 4\lambda + 2\lambda + 2\lambda = -\lambda^3 \end{aligned}$$

La seule valeur propre est 0;1 donc $\rho(J) < 1$ et la méthode converge.

$$\begin{aligned}
G = (D - E)^{-1}F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & -3 \\ 0 & 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda((2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 12) = -\lambda(\lambda^2 + 8)$$

Ainsi, $\text{sp}(G) = \{0, 2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}i\}$ et $\rho(G) = 2\sqrt{2} > 1$: la méthode ne converge pas.

Exercice 7 :

Soit A une matrice tridiagonale de taille $n \geq 3$ dont les termes diagonaux sont non nuls. Soit D la matrice diagonale de A , E (resp. F) la matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) stricte de A . On a donc $A = D + E + F$; on pose $J = -D^{-1}(E + F)$ et $G = -(D + E)^{-1}F$.

1) Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on définit, pour tout réel non nul t la matrice $M(t) = (m_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $m_{ij}(t) = t^{i-j}m_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Montrer alors que :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^*, \quad \det(M(t)) = \det(M).$$

2) On pose $M = F + \lambda^2(D + E)$. En utilisant les notations de la questions 1), écrire la matrice $M(1/\lambda)$ en fonction de D , E , F et λ .

3) Montrer que si P_J est le polynôme caractéristique de J et P_G celui de G , alors on a $P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda)$. En déduire que $\rho(G) = (\rho(J))^2$ et conclure.

1)

$$\begin{aligned}
\det M(t) &= \begin{vmatrix} m_{11} & \frac{m_{12}}{t} & \frac{m_{13}}{t^2} & \cdots & \frac{m_{1,n}}{t^{n-1}} \\ tm_{21} & m_{22} & \frac{m_{23}}{t} & \cdots & \frac{m_{2,n}}{t^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{n-1}m_{n,1} & t^{n-2}m_{n,2} & \cdots & tm_{n,n-1} & m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{t} \times \cdots \times \frac{1}{t^{n-1}} \det(C_1, tC_2, \cdots, t^{n-1}C_n) \\
&= \frac{1}{t} \times \cdots \times \frac{1}{t^{n-1}} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1,n} \\ tm_{21} & tm_{22} & tm_{23} & \cdots & tm_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{n-1}m_{n,1} & t^{n-1}m_{n,2} & \cdots & t^{n-1}m_{n,n-1} & t^{n-1}m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{t} \times \cdots \times \frac{1}{t^{n-1}} \det \begin{pmatrix} L_1 \\ tL_2 \\ \vdots \\ t^{n-1}L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det(M)
\end{aligned}$$

2) On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & (0) \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ (0) & & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

On a $M = F + \lambda^2(D + E) = \begin{pmatrix} \lambda^2 a_1 & c_1 & & (0) \\ \lambda^2 b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ (0) & & \lambda^2 b_n & \lambda^2 a_n \end{pmatrix}$ et

$$M(1/\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 a_1 & \lambda c_1 & & (0) \\ \lambda b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \lambda c_{n-1} \\ (0) & & \lambda b_n & \lambda^2 a_n \end{pmatrix} = \lambda(E + F) + \lambda^2 D.$$

3)

$$\begin{aligned} P_G(\lambda^2) &= \det(-(D + E)^{-1}F - \lambda^2 I) = (-1)^n \det((D + E)^{-1}) \det(F + \lambda^2(D + E)) \\ &= (-1)^n \det(M) \det((D + E)^{-1}) = (-1)^n \det(M(1/\lambda)) \det((D + E)^{-1}) \\ &= (-1)^n \det(\lambda(E + F) + \lambda^2 D) \times \det((D + E)^{-1}) \\ &= (-1)^n \lambda^n \det((E + F) + \lambda D) \times \det((D + E)^{-1}) \\ &= \lambda^n \det(D) \det(-D^{-1}(E + F) - \lambda I) \times \det((D + E)^{-1}) = \lambda^n \det(J - \lambda I) \end{aligned}$$

$$\text{car } \det((D + E)^{-1}) = \frac{1}{\det(D + E)} = \frac{1}{\det D} = \frac{1}{\prod_k a_{kk}}.$$

Ainsi, $P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda)$.

λ est valeur propre de J équivaut à λ^2 est valeur propre de G et $\text{sp}(G) = \{\lambda^2 ; \lambda \in \text{sp}(J)\}$ et $\rho(G) = (\rho(J))^2$.

On a donc, comme ρ est positif, $\rho(G) < 1$ si et seulement si $\rho(J) < 1$ et dans ce cas, les deux méthodes sont convergentes ou bien aucune des deux ne converge.