USTHB 2020-2021 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse numérique 2
$2^{\text{ème}}$ année Lic Maths

Examen final - 4 juillet 2021. Durée : 1h30

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/ **20**

Exercice 1 (6 pts.) : On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

a) Réaliser la décomposition de Cholesky de la matrice A.

b) Calculer le déterminant de la matrice A.

c) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la décomposition de Cholesky précédente.

Réponse.

Exercice 2 (7 pts.) : On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer la factorisation LU de la matrice A.

b) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation LU.

c) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

Réponse.

Exercice 3 (7 pts.) : On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $b \in \mathbb{R}^3$, on s'intéresse aux deux systèmes linéaires $Ax = b$ et $Bx = b$.

On rappelle que si $A = D - E - F$ alors la matrice de Jacobi $J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$ et celle de Gauss-Seidel est $G = (D-E)^{-1}F$.

a) Montrer que, pour $Ax = b$, la méthode de Jacobi converge alors que celle de Gauss-Seidel diverge.

b) Montrer que, pour $Bx = b$, la méthode de Gauss-Seidel converge alors que celle de Jacobi diverge.

Réponse.

a) Pour la matrice A on a

$$E = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

- La matrice itérative de Jacobi associée est

$$J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

On calcule les valeurs propres de J, qui sont les racines du polynôme $\det(J - \lambda I)$ en λ. On a

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Les racines sont $\lambda_1 = \ldots\ldots\ldots$, $\lambda_2 = \ldots\ldots\ldots$ et $\lambda_3 = \ldots\ldots\ldots$.

Donc $\rho(J) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et la méthode de Jacobi est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

- La matrice itérative de Gauss-Seidel associée est

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice G est

$$\det\left(G-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui a pour racines $\lambda_1 =$ ...., $\lambda_2 =$ .... et $\lambda_3 =$ ....

Donc $\rho\left(G\right) =$ .... et la méthode de Gauss-Seidel ....

b) Pour la matrice B on a

$$E=\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

- La matrice itérative de Jacobi associée est

$$J=D^{-1}\left(E+F\right)=I-D^{-1}B=\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice J est

$$\det\left(J-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont les racines $\lambda_1 =$ ...., $\lambda_2 =$ .... et $\lambda_3 =$ ....

On a donc $\rho\left(J\right) =$ .... et la méthode de Jacobi est ....

- La matrice itérative de Gauss-Seidel associée est

$$G=\left(D-E\right)^{-1}F=\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice G est

$$\det\left(G-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Les racines sont $\lambda_1 =$ ...., $\lambda_2 =$ .... et $\lambda_3 =$ ....

On a donc $\rho\left(G\right) =$ .... et la méthode de Gauss-Seidel ....