USTHB 2020-2021 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse numérique 2
$2^{\text{ème}}$ année Lic Maths

U S T H B

Examen final - 4 juillet 2021. Durée : 1h30

Nom et Prénom :...

Matricule :...

/20

Exercice 1 (6 pts.) : On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

a) Réaliser la décomposition de Cholesky de la matrice A.

b) Calculer le déterminant de la matrice A.

c) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la décomposition de Cholesky précédente.

Réponse.

a) Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}; \quad B^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

$A = BB^t$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 14 \end{pmatrix},$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$(b_{11})^2 = 1 \Longrightarrow b_{11} = 1$$

$$b_{21}b_{11} = -1 \Longrightarrow b_{21} = -1$$

$$b_{31}b_{11} = 1 \Longrightarrow b_{31} = 1$$

$$(b_{21})^2 + (b_{22})^2 = 5 \Longrightarrow b_{22} = 2$$

$$b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} = -5 \Longrightarrow b_{32} = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$(b_{31})^2 + (b_{32})^2 + (b_{33})^2 = 14 \Longrightarrow b_{33} = \sqrt{14-4-1} = 3.$$

Alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) On a $\det A = (\det B)^2 = (1 \times 2 \times 3)^2 = 36$.

c) Résolvons successivement les systèmes $By = b$ puis $B^t x = y$.

- Système $By = b$:

$$\begin{cases} y_1 & & & = -2 \\ -y_1 & +2y_2 & & = 6 \\ y_1 & -2y_2 & +3y_3 & = -15 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = \frac{1}{2}(6 + y_1) = 2 \\ y_3 = \frac{1}{3}(-15 - y_1 + 2y_2) = -3 \end{cases}.$$

- Système $B^t x = y$:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = -2 \\ & 2x_2 & -2x_3 & = 2 \\ & & 3x_3 & = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = 1 + x_3 = 0 \\ x_1 = -2 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}.$$

La solution est donc

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (7 pts.) : On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer la factorisation LU de la matrice A.

b) Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la factorisation LU.

c) Calculer le déterminant de la matrice A.

d) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2 x = b$.

Réponse.

a) On a

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E_1A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E_2E_1A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$U=E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L=L_1L_2L_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Résolvons successivement les systèmes $Ly=b$ puis $Ux=y$.

- Système $Ly=b$:

$$\left\{\begin{array}{lllll} y_1 & & & & =5 \\ 2y_1 & +y_2 & & & =9 \\ -y_1 & +y_2 & +y_3 & & =1 \\ & 3y_2 & & +y_4 & =-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y_1=5 \\ y_2=9-2y_1=-1 \\ y_3=1+y_1-y_2=7 \\ y_4=-2-3y_2=1 \end{array}\right..$$

- Système $Ux=y$:

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & =5 \\ & x_2 & -3x_3 & +x_4 & =-1 \\ & & 5x_3 & +2x_4 & =7 \\ & & & x_4 & =1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_4=1 \\ x_3=\frac{1}{5}(7-2x_4)=1 \\ x_2=-1+3x_3-x_4=1 \\ x_1=\frac{1}{2}(5+x_2-4x_3)=1 \end{array}\right..$$

La solution est donc

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) On a $\det A = \det L \times \det U = (1 \times 1 \times 1 \times 1) \cdot (2 \times 1 \times 5 \times 1) = 10$.

d) On a $A^2 x = b \Longleftrightarrow A\,(Ax) = b \Longleftrightarrow (Ay = b \text{ et } Ax = y)$.

Comme la solution de $Ay = b$ est $y = (1,1,1,1)^t$, alors

$$A^2 x = b \Longleftrightarrow Ax = (1,1,1,1)^t.$$

Résolvons ce système par la méthode utilisée à la question **b**.

- <u>Système $Ly = (1,1,1,1)^t$</u> :

$$\begin{cases} y_1 & & & & = 1 \\ 2y_1 & +y_2 & & & = 1 \\ -y_1 & +y_2 & +y_3 & & = 1 \\ & 3y_2 & & +y_4 & = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 - 2y_1 = -1 \\ y_3 = 1 + y_1 - y_2 = 3 \\ y_4 = 1 - 3y_2 = 4 \end{cases}.$$

- <u>Système $Ux = y$</u> :

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & = 1 \\ & x_2 & -3x_3 & +x_4 & = -1 \\ & & 5x_3 & +2x_4 & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_4 = 4 \\ x_3 = \frac{1}{5}(3 - 2x_4) = -1 \\ x_2 = -1 + 3x_3 - x_4 = -8 \\ x_1 = \frac{1}{2}(1 + x_2 - 4x_3) = \frac{-3}{2} \end{cases}.$$

La solution de $A^2 x = b$ est donc

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ -8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

<u>**Exercice 3 (7 pts.)**</u> **:** On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $b \in \mathbb{R}^3$, on s'intéresse aux deux systèmes linéaires $Ax = b$ et $Bx = b$.

On rappelle que si $A = D - E - F$ alors la matrice de Jacobi $J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$ et celle de Gauss-Seidel est $G = (D - E)^{-1} F$.

a) Montrer que, pour $Ax = b$, la méthode de Jacobi converge alors que celle de Gauss-Seidel diverge.

b) Montrer que, pour $Bx = b$, la méthode de Gauss-Seidel converge alors que celle de Jacobi diverge.

Réponse.

a) Pour la matrice A on a

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice itérative de Jacobi associée est

$$J = I - D^{-1}A = I - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule les valeurs propres de J, qui sont les racines du polynôme $\det(J - \lambda I)$ en λ. On a

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 2\right) - (-2\lambda - 4) - 2(2 + 2\lambda) = -\lambda^3.$$

$\lambda = 0$ est une racine triple, donc $\rho(J) = 0 < 1$ et la méthode de Jacobi est donc converge.

- La matrice itérative de Gauss-Seidel associée est

$$G = (D - E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice G est

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2-\lambda)^2,$$

qui a pour racines $\lambda_1 = 0$ et la racine double $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Donc $\rho(G) = 2 > 1$ et la méthode de Gauss-Seidel diverge.

b) Pour la matrice B on a

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice itérative de Jacobi associée est

$$J = I - D^{-1}B = I - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice J est

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -\lambda & -3 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 6\right) - 2(-\lambda + 4) = -\lambda^3 + 8\lambda - 8$$

$$= -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 + 2\lambda - 4\right),$$

dont les racines $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \sqrt{5} - 1$ et $\lambda_3 = -\sqrt{5} - 1$. On a donc $\rho(J) = 1 + \sqrt{5} > 1$ et la méthode de Jacobi diverge.

- La matrice itérative de Gauss-Seidel associée est

$$G = (D - E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice G est

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left((2-\lambda)(-2-\lambda) + 4\right) = -\lambda^3.$$

Il existe une racine triple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a donc $\rho(G) = 0$ et par conséquent la méthode de Gauss-Seidel converge.