Examen de rattrapage - 26 juillet 2021. Durée : 1h30

Avant de commencer le test, lire et écrire sur votre copie de réponse la phrase suivante, puis signer.

Nantissement : Sur mon honneur, je ne vais pas, ni donner, ni demander de l' aide sur cet examen.

Exercice 1 (6 pts.) : On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Donner la décomposition QR de la matrice A.

b) En déduire la solution du système $Ax = b$.

Exercice 2 (7 pts.) : Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$ défini par

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \beta & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \end{pmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

a) Que peut-on dire de la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel si $\beta = 3$ et si $\beta = 2$.

b) Dans le cas où $\beta = 3$:

i) Calculer la solution exacte du système $Ax = b$, en utilisant la factorisation LU.

ii) Calculer les deux premiers itérés des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel en partant de $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$.

Exercice 3 (7 pts.) : On considère la matrice tridiagonale A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour $b \in \mathbb{R}^3$, on s'intéresse au système linéaire $Ax = b$.

On rappelle que si $A = D - E - F$ alors la matrice de Jacobi $J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$ et celle de Gauss-Seidel est $G = (D - E)^{-1} F$.

a) Calculer $\rho(J)$ le rayon spectral de J.

b) Calculer $\rho(G)$ le rayon spectral de G.

c) En déduire que $\rho(G) = (\rho(J))^2$.

d) Que peut-on dire de la convergence des processus de Jacobi et Gauss-Seidel associés au système $Ax = b$?