Chapitre 4

Intégration numérique

Sommaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter différentes manières d'approximer l'intégrale d'une fonction bornée f définie sur un intervalle $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Il existe diverses raisons pour lesquelles de telles approximations peuvent être utiles. Premièrement, toutes les fonctions ne peuvent pas être intégrées analytiquement. Par exemple, comme le cas de la fonction erf qui s'appelle la fonction d'erreur de Gauss, définie comme suit-0.4cm

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Deuxièmement, même s'il existe une primitive, ce n'est peut-être pas le moyen le plus efficace de calculer l'intégrale. C'est par exemple le cas de l'intégrale

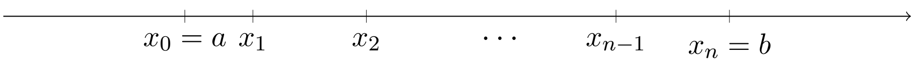
$$\int_0^\pi \cos(4x)\cos(3\sin x) = \pi \frac{81}{16} \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{-9}{4}\right)^n}{n!\,(n+4)!}.$$

On voit que le calcul de cette intégrale est transformé en un calcul, aussi difficile, de la somme d'une série.

De plus, il peut arriver que nous ayons besoin d'intégrer une fonction inconnue, dans laquelle seuls quelques échantillons de la fonction sont connus.

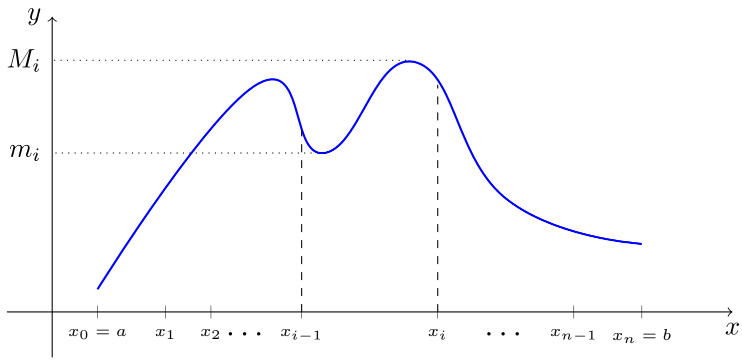
Afin d'avoir un aperçu sur l'intégration numérique, il est naturel de rappeler l'intégration de Riemann, un cadre qui peut être considéré comme une approche pour l'approximation des intégrales.

On suppose que f est une fonction bornée définie sur $[a, b]$ et que $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ une subdivision $[a, b]$.



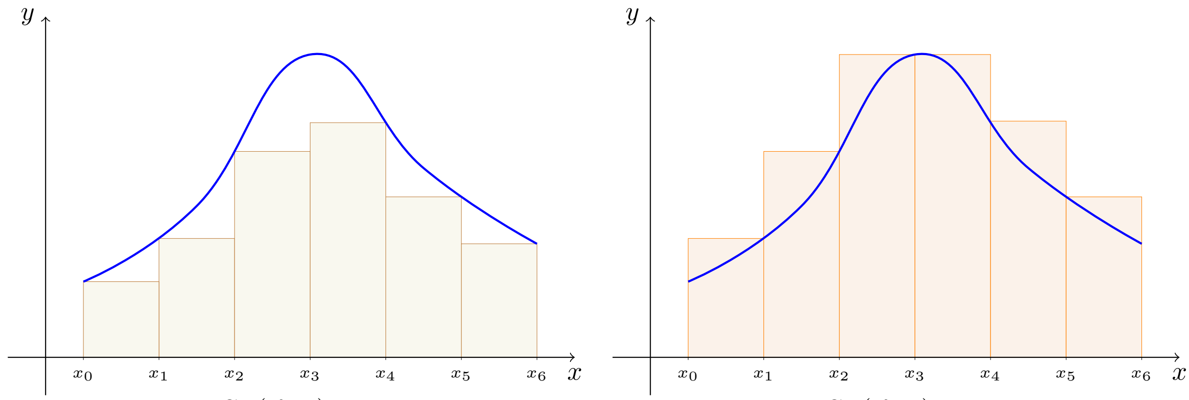
Pour chaque i on définit les réels

$$m_i = \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x).$$



Soit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, les sommes de Darboux inférieure et supérieure sont définies par

$$S_-(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{et} \quad S_+(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$



$S_-(f,\sigma)$ $S_+(f,\sigma)$

On définit ainsi les intégrales inférieure et supérieure de f par

$$I_-(f) = \sup_{\sigma} S_-(f,\sigma) \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf_{\sigma} S_+(f,\sigma),$$

où les deux, l'infimum et le supremum sont pris sur toutes les subdivisions possibles σ de l'intervalle $[a,b]$.

Si les intégrales supérieure et inférieure de f sont égales l'une à l'autre, leur valeur commune est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et est appelée intégrale de Riemann de $f(x)$.

Pour $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$, on définit la somme de Riemann de f sur $[a,b]$ liée à σ par

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Si la subdivision est régulière

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

la somme de Riemann associée à f est

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Toute formule permettant de calculer une approximation de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, s'appelle formule de quadrature ou formule d'intégration numérique. Une approche simple pour approximer cette intégrale serait par la somme de Riemann,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Certains choix de ξ_i sont plus courants :

- pour $\xi_i = x_{i-1}$ pour tout i, on parle de méthode des rectangles à gauche.
- pour $\xi_i = x_i$ pour tout i, on parle de méthode des rectangles à droite.
- pour $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ pour tout i, on parle de méthode du point milieu.

Une méthode d'intégration est dite **d'ordre** k si l'erreur commise en approchant l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par une somme finie

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

est nulle lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k et non nulle pour au moins un polynôme de degré supérieur ou égal à $k+1$.

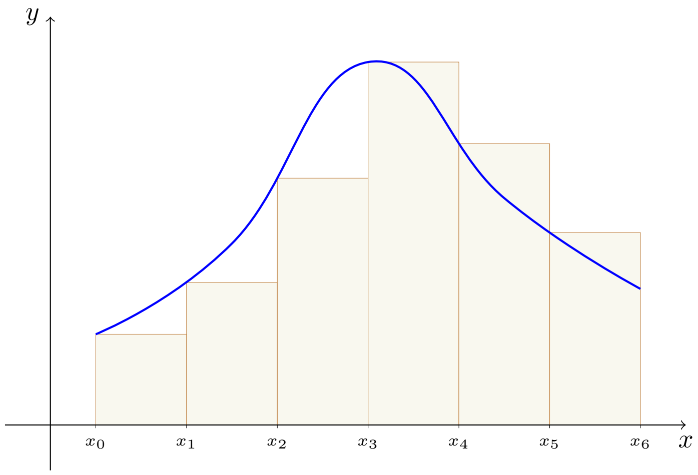
4.2 Formules de Newton-Cotes

4.2.1 Méthode des rectangles

Dans la méthode des rectangles, on remplace la fonction à intégrer f par une fonction constante par morceaux $g(x)$ sur chaque intervalle élémentaire $[x_{i-1}, x_i]$, soit par

- **les rectangles à gauche** : $g(x) = f(x_{i-1})$ pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$

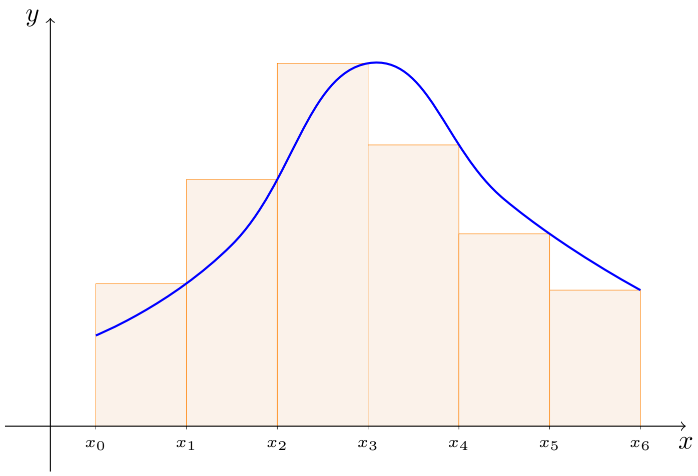
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_{i-1}),$$



soit par

- **les rectangles à droite** : $g(x) = f(x_i)$ pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$

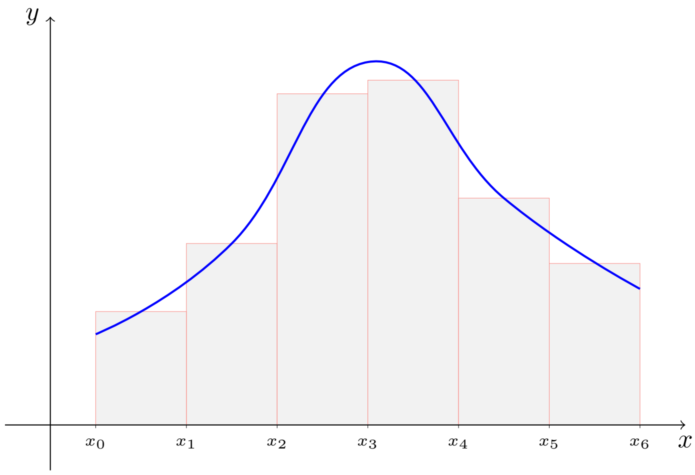
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_i)\,,$$



soit par

- **les rectangles avec point au milieu** : $g(x) = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$



Si la subdivision est régulière de longueur (pas) $h = \dfrac{b-a}{n}$,

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \cdots, n,$$

on a les formules des rectangles

- à gauche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = h\big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$.
- à droite $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = h\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big)$.
- avec point au milieu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\sum_{i=1}^{n} f\left(\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = h\left(f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) + \cdots + f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right)\right)$.

Les méthodes des rectangles à gauche et à droite sont des méthodes d'ordre 0. Lorsque la dérivée première de f est bornée par une constante M, l'erreur est donnée par

- à gauche $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\right| \leq \frac{b-a}{2} h \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$,
- à droite $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right| \leq \frac{b-a}{2} h \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

En effet, posons

$$F(h) = \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx.$$

On a

$$F'(h) = f(\alpha+h) \quad \text{et} \quad F''(h) = f'(\alpha+h).$$

Par la formule de Taylor au deuxième ordre, il existe $c \in\,]0, h[$ tel que

$$F(h) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{2}F''(c).$$

Soit encore

$$\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)\,dx = hf(\alpha) + \frac{h^2}{2} f'(\alpha + c).$$

En appliquant la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx - hf(x_{i-1})\right| \\ &\leq \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|f'(a+(i-1)h+c)\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} h \sup_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|\end{aligned}$$

puisque $h = \dfrac{b-a}{n}$. De même pour la méthode des rectangles à droite.

La méthode des rectangles avec point au milieu est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans cette méthode si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, est donnée par l'expression

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n} f\left(\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

Exemple 27

Évaluons numériquement pour $n = 3$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ dont la valeur exacte est $I(f) = 1$.

On a $a = 0, b = \frac{\pi}{2}, n = 3, h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih\,, 0 \leq i \leq n$ et $f(x) = \sin x$.

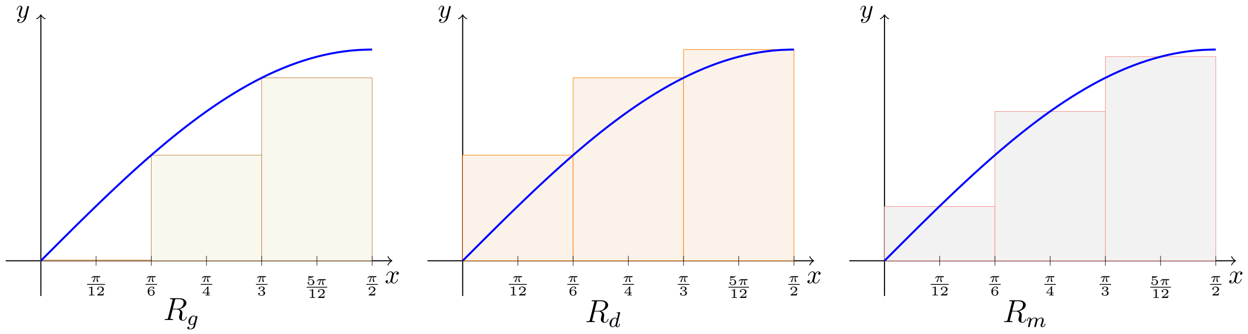
Donc $h = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{3} = \frac{\pi}{6}, x_i = i\frac{\pi}{6}\,, 0 \leq i \leq 3$. Alors on a le tableau suivant :

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_i) = \sin x_i$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

i	1	2	3
$\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$
$f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Pour le calcul de l'intégrale on a

- rectangles à gauche $\quad R_g = h\displaystyle\sum_{i=1}^{3} f(x_{i-1}) = \frac{\pi}{6}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{12}\pi \simeq 0.7152492.$
- rectangles à droite $\quad R_d = h\displaystyle\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{12}\pi \simeq 1.238848.$
- rectangles avec point au milieu $\quad R_m = h\displaystyle\sum_{i=1}^{3} f\left(\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}\pi \simeq 1.011515.$



Pour l'erreur commise, on a

$$E_r\left(R_g\right)=\frac{\left|I\left(f\right)-R_g\left(f\right)\right|}{\left|I\left(f\right)\right|}\simeq\frac{\left|1-0.7152492\right|}{\left|1\right|}\simeq 0.2847=28.47\%,$$
$$E_r\left(R_d\right)=\frac{\left|I\left(f\right)-R_d\left(f\right)\right|}{\left|I\left(f\right)\right|}\simeq\frac{\left|1-1.238848\right|}{\left|1\right|}\simeq 0.2388=23.88\%,$$
$$E_r\left(R_m\right)=\frac{\left|I\left(f\right)-R_m\left(f\right)\right|}{\left|I\left(f\right)\right|}\simeq\frac{\left|1-1.011515\right|}{\left|1\right|}\simeq 0.01151=1.151\%.\quad\blacksquare$$

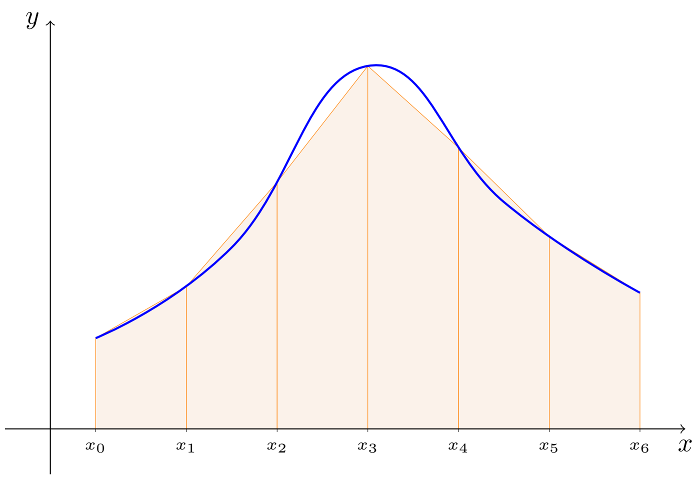
4.2.2 Méthode des trapèzes

Dans la méthode des trapèzes, la fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_{i-1},x_i]$ par la droite joignant les points $(x_{i-1},f\left(x_{i-1}\right))$ et $(x_i,f\left(x_i\right))$, soit

$$g\left(x\right)=\frac{\left(x-x_{i-1}\right)f\left(x_i\right)-\left(x-x_i\right)f\left(x_{i-1}\right)}{x_i-x_{i-1}},\quad x\in\left[x_{i-1},x_i\right].$$

La méthode s'écrit

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\simeq\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)\frac{f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_i\right)}{2}.$$



Lorsque la subdivision est régulière de longueur (pas) $h=\dfrac{b-a}{n}$,

$$x_i=a+ih,\quad i=0,\cdots,n,$$

on a
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right).$$
La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans la méthode des trapèzes si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, est donnée par l'expression
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right| \leq \frac{b-a}{12}h^2 \sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$
Pour améliorer la précision, on considère parfois la formule des trapèzes corrigée suivante
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} - \frac{h^2}{12}\left(f'(b)-f'(a)\right).$$

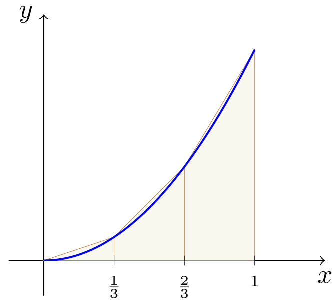
Exemple 28

Soit $f(x) = x^2$ sur $[a,b] = [0,1]$, on prend $n = 3$ subdivisions.

Donc $a = 0, b = 1, n = 3, h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{3}, x_i = a + ih = \dfrac{i}{3}, 0 \leq i \leq 3.$

Alors on a le tableau suivant :

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$f(x_i) = x_i^2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	1



Pour le calcul de l'intégrale on a
$$T_3(f) = \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right) = \frac{1}{6}\left(0+\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1\right) = \frac{19}{54} \simeq 0.3518519.$$
La valeur exacte de l'intégrale est
$$I(f) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \simeq 0.3333333.$$
Pour l'erreur commise, on a
$$E_r(T_3) = \frac{|I(f)-T_3(f)|}{|I(f)|} = \frac{\left|\frac{1}{3}-\frac{19}{54}\right|}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{\left|-\frac{1}{54}\right|}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{54} \simeq 0.05555\,556 \simeq 5.55\%. \blacksquare$$

4.2.3 Méthode de Simpson

On suppose que la subdivision est régulière de longueur (pas) $h = \dfrac{b-a}{n}$,
$$x_i = a + ih, \quad i = 0,\cdots,n,$$

Dans la méthode de Thomas Simpson (1710-1761), la fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ par un polynôme du second degré p_2 définissant un arc de parabole passant par les points d'ordonnées $(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ où

$$p_2(x) = \tfrac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} f(x_{i-1}) - \tfrac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2} f(x_i) + \tfrac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2} f(x_{i+1}), \; x \in [x_{i-1}, x_{i+1}].$$

Comme trois points induisent deux subdivisions, le nombre n de subdivisions doit être pris pair ($n = 2m$).

Pour tout $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ on a $f(x) \simeq p_2(x)$ alors

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right).$$

C'est la première formule de Simpson simple sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. D'où

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\simeq \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx \\ &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) + \\ &\qquad \cdots + \frac{h}{3}\left(f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\right) \\ &= \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4\left(f(x_1) + \cdots + f(x_{2m-1})\right) + 2\left(f(x_2) + \cdots + f(x_{2m-2})\right) + f(x_{2m})\Big).\end{aligned}$$

La méthode de Simpson s'écrit donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \simeq S(f) &= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i \text{ pair}} f(x_i) + 4\sum_{i \text{ impair}} f(x_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{h}{3}\Big(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\Big).\end{aligned}$$

La méthode de Simpson est une méthode d'ordre 4. Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, l'erreur commise est donnée par l'expression

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S(f)\right| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Exemple 29

On reprend le calcul de l'exemple précédent. Pour la fonction $f(x) = x^2$ dans l'intervalle $[0,1]$, on prend $n = 4$ subdivisions, on a

$$\begin{aligned}S_4(f) &= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left(f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2f\left(\tfrac{2}{4}\right) + 4f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f(1)\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(0 + 4\frac{1}{16} + 2\frac{4}{16} + 4\frac{9}{16} + 1\right) = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx.\end{aligned}$$

Ce résultat obtenu est attendu car la méthode de Simpson est d'ordre 4. ∎