

(À faire en TD les exercices 1 et 6 et les autres exercices sont supplémentaires)

Exercice 1 : Évaluer l'erreur absolue et l'erreur relative (%) commises en approximant le nombre π par chacune de ces quantités : (a) 3 (b) 3.14 (c) $\frac{22}{7}$.

Exercice 2 : La surface A de la terre peut-être calculée par la formule $A = 4\pi r^2$, où r désigne le rayon de la terre.

(a) Citer cinq (5) approximations qui sont utilisées pour le calcul de la surface avec cette formule sur un ordinateur.

(b) Si le rayon $r = 6370 \text{ km}$ est connu avec une précision de 2%, quelle est l'erreur relative sur la surface?

Exercice 3 : Approximer e^π en utilisant les 4 premiers termes de la série $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Quelle est l'erreur relative commise? Y a-t-il d'autres sources d'erreur lors de ce calcul?

Exercice 4 : Vous allerz calculer les deux racines de $ax^2 + bx + c = 0$ pour $a = 0.05010$, $b = -98.78$, et $c = 5.015$ à l'aide des deux formules suivantes :

$$(1) \quad x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (2) \quad x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(a) Montrer que les deux formules sont équivalentes.

(b) Vérifier que les racines exactes sont $x_1 = 1971.605916$ et $x_2 = 0.05077069387$.

(c) Calculer les deux solutions avec la première formule en utilisant 4 chiffres significatifs avec arrondi pour tous les calculs. Faire un calcul d'erreur.

(d) Répéter le calcul avec la deuxième formule. Conclure.

Exercice 5 : Soient les trois nombres réels $x = 8.22$, $y = 0.00317$ et $z = 0.00432$.

(a) Représenter les nombres x, y et z avec virgule flottante.

(b) En effectuant les calculs avec $N = 10$ chiffres significatifs, calculer la somme $x + y + z$ en faisant :

$$(1) \quad (x + y) + z \quad (2) \quad x + (y + z).$$

(c) Commenter les résultats obtenus. Conclure.

Exercice 6 : Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$.

Le polynôme P peut être réécrit par l'algorithme de Horner sous la forme

$$P(x) = x(x(x(x(x - 15) + 85) - 225) + 274) - 120.$$

a) Déterminer la valeur exacte de $P(2.5)$ par calcul direct et par l'algorithme de Horner.

b) Calculer les valeurs approchées de $P(2.5)$ en utilisant 3 chiffres significatifs avec arrondi pour tous les calculs. Faire un calcul d'erreur.

Solution de l'exercice 1 :

On rappelle que si x^* est une approximation de x , alors

$$E_a(x^*) = \Delta x = |x - x^*| \quad \text{et} \quad E_r(x^*) = \delta x = \frac{E_a(x^*)}{|x|}.$$

$$(a) \quad E_a(3) = |\pi - 3| = 0.141\,592\,65 \quad E_r(3) = \frac{E_a(3)}{|\pi|} \times 100 = 4.51\%,$$

$$(b) \quad E_a(3.14) = |\pi - 3.14| = 0.001\,592\,653\,6 \quad E_r(3.14) = \frac{E_a(3.14)}{|\pi|} \times 100 = 0.050\,7\%,$$

$$(c) \quad E_a\left(\frac{22}{7}\right) = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0.001\,264\,489\,3 \quad E_r\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{E_a\left(\frac{22}{7}\right)}{|\pi|} \times 100 = 0.040\,2\%,$$

Solution de l'exercice 6 :

a) Par un calcul direct : $P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$. Pour $x = 2.5$ on a

$$P(2.5) = (2.5)^5 - 15 \times (2.5)^4 + 85 \times (2.5)^3 - 225 \times (2.5)^2 + 274 \times (2.5) - 120 = -1.406\,25$$

Par l'algorithme de Horner $P(x) = x(x(x(x(x - 15) + 85) - 225) + 274) - 120$. Pour $x = 2.5$ on a

$$P(x) = 2.5(2.5(2.5(2.5(2.5 - 15) + 85) - 225) + 274) - 120 = -1.406\,25$$

b) En utilisant 3 chiffres significatifs avec arrondi :

Par un calcul direct $P(2.5) = -1.41$

Par l'algorithme de Horner $P(2.5) = -1.41$

Calcul d'erreur :

$$E_a(P(2.5)) = |P(2.5) - P(2.5)^*| = 0.003\,75$$

$$E_r(P(2.5)) = \frac{E_a(P(2.5))}{|P(2.5)|} \times 100 = 0.267\%$$