USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Analyse numérique
$2^{\text{ème}}$ année Lic Maths

Série d'exercices n° 3 : Dérivation numérique

Exercice 1 :

Approcher $f'(1)$ et $f''(1)$ pour le tableau suivant :

x_i	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
$y_i = f(x_i)$	0.995	0.999	1.000	1.003	1.008

en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées.

Exercice 2 :

a) Approcher $f'(4)$ en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées pour le tableau suivant :

x_i	0	1	4	9	16
$y_i = f(x_i) = \sqrt{x_i}$	0	1	2	3	4

puis calculer l'erreur relative dans chaque cas.

b) Même questions pour $g''(2)$ avec le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = g(x_i) = x_i^2$	0	1	4	9	16

Exercice 3 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins $\mathcal{C}^6$ sur l'intervalle $[a, b]$.

On se fixe un nombre $h > 0$ petit, ainsi qu'un point quelconque $x \in \,]a, b[$.

Montrer que le rapport

$$A = \frac{-2f(x+2h) + 32f(x+h) - 60f(x) + 32f(x-h) - 2f(x-2h)}{24h^2}$$

approche une dérivée de f que l'on déterminera, et donner l'ordre de précision de cette approximation.

Solution de l'exercice 1 :

x_i	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
$y_i = f(x_i)$	0.995	0.999	1.000	1.003	1.008

Calcule de l'approximation de $f'(1)$ et $f''(1)$.

Formule de différences progressives :

$$f'_p(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \longrightarrow f'_p(1) = \tfrac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1} = \tfrac{1.003-1.000}{0.1} = 0.03.$$

$$f''_p(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \longrightarrow f''_p(1) = \tfrac{f(1.2)-2f(1.1)+f(1)}{0.1^2} = \tfrac{1.008-2.006+1}{0.1^2} = 0.2.$$

Formule de différences régressives :

$$f'_r(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \longrightarrow f'_r(1) = \tfrac{f(1)-f(0.9)}{1-0.9} = \tfrac{1-0.999}{0.1} = 0.01.$$

$$f''_r(x) = \frac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} \longrightarrow f''_r(1) = \tfrac{f(0.8)-2f(0.9)+f(1)}{0.1^2} = \tfrac{0.995-1.998+1}{0.1^2} = -0.3.$$

Formule de différences centrées :

$$f'_c(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \longrightarrow f'_c(1) = \tfrac{f(1.1)-f(0.9)}{1.1-0.9} = \tfrac{1.003-0.999}{0.2} = 0.02.$$

$$f''_c(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \longrightarrow f''_c(1) = \tfrac{f(0.9)-2f(1)+f(1.1)}{0.1^2} = \tfrac{0.999-2+1.003}{0.1^2} = 0.2.$$

Solution de l'exercice 2 :

x_i	0	1	4	9	16
$y_i = f(x_i) = \sqrt{x_i}$	0	1	2	3	4

a) Approximation de $f'(4)$.

Formule de différences progressives :

$$f'_p(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \longrightarrow f'_p(4) = \frac{f(9) - f(4)}{9-4} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Formule de différences régressives :

$$f'_r(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \longrightarrow f'_r(4) = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \simeq 0.33.$$

Formule de différences centrées :

$$f'_c(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \longrightarrow f'_c(4) = \frac{f(9) - f(1)}{9-1} = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

La dérivée de f est $f'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, alors la valeur exacte de $f'(4)$ est $\dfrac{1}{4}$.

Pour l'erreur relative commise, on a

$$E_r\,(prog.) = \frac{\left|f'\,(4) - f'_p\,(4)\right|}{\left|f'\,(4)\right|} = \frac{\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right|}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{1}{5} = 20\%,$$

$$E_r\,(reg.) = \frac{\left|f'\,(4) - f'_r\,(4)\right|}{\left|f'\,(4)\right|} = \frac{\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right|}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{1}{3} \simeq 33.33\%,$$

$$E_r\,(cent.) = \frac{\left|f'\,(4) - f'_c\,(4)\right|}{\left|f'\,(4)\right|} = \frac{\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right|}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 0 = 0\%.$$

b) Approximation de $g''\,(2)$.

Formule de différences progressives :

$$g''_p\,(x) = \frac{g\,(x+2h) - 2g\,(x+h) + g\,(x)}{h^2} \longrightarrow g''_p\,(2) = \tfrac{g(4)-2g(3)+g(2)}{1^2} = 16 - 18 + 4 = 2.$$

Formule de différences régressives :

$$g''_r\,(x) = \frac{g\,(x-2h) - 2g\,(x-h) + g\,(x)}{h^2} \longrightarrow g''_r\,(2) = \tfrac{g(0)-2g(1)+g(2)}{1^2} = 0 - 2 + 4 = 2.$$

Formule de différences centrées :

$$g''_c\,(x) = \frac{g\,(x-h) - 2g\,(x) + g\,(x+h)}{h^2} \longrightarrow g''_c\,(2) = \tfrac{g(1)-2g(2)+g(3)}{1^2} = 1 - 8 + 9 = 2.$$

La dérivée seconde de g est $g''\,(x) = \frac{d^2}{dx^2}\,(x^2) = 2$, alors la valeur exacte de $g''\,(2)$ est 2.

Pour l'erreur relative commise, on a $E_r\,(prog.) = E_r\,(reg.) = E_r\,(cent.) = 0$.

<u>Solution de l'exercice 3</u> :

Effectuons les développements de Taylor de f au voisinage de x jusqu'à l'ordre 5.

$$f\,(x+h) = f\,(x) + hf'\,(x) + \tfrac{h^2}{2}f''\,(x) + \tfrac{h^3}{6}f'''\,(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}\,(x) + \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}\,(x) + O\left(h^6\right),$$

$$f\,(x-h) = f\,(x) - hf'\,(x) + \tfrac{h^2}{2}f''\,(x) - \tfrac{h^3}{6}f'''\,(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}\,(x) - \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}\,(x) + O\left(h^6\right),$$

$$f\,(x+2h) = f\,(x) + 2hf'\,(x) + 2h^2f''\,(x) + \tfrac{4h^3}{3}f'''\,(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}\,(x) + \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}\,(x) + O\left(h^6\right),$$

$$f\,(x-2h) = f\,(x) - 2hf'\,(x) + 2h^2f''\,(x) - \tfrac{4h^3}{3}f'''\,(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}\,(x) - \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}\,(x) + O\left(h^6\right).$$

En combinant ces développements de Taylor on obtient les formules

$$32\Big(f\,(x+h) + f\,(x-h)\Big) = 64f\,(x) + 32h^2f''\,(x) + \tfrac{8h^4}{3}f^{(4)}\,(x) + O\left(h^6\right),$$

$$-2\Big(f\,(x+2h) + f\,(x-2h)\Big) = -4f\,(x) - 8h^2f''\,(x) - \tfrac{8h^4}{3}f^{(4)}\,(x) + O\left(h^6\right),$$

ou encore

$$-2\Big(f\,(x+2h) + f\,(x-2h)\Big) + 32\Big(f\,(x+h) + f\,(x-h)\Big) = 60f\,(x) + 24h^2f''\,(x) + O\left(h^6\right).$$

D'où

$$A = \frac{-2f\,(x+2h) + 32f\,(x+h) - 60f\,(x) + 32f\,(x-h) - 2f\,(x-2h)}{24h^2} = f''\,(x) + O\left(h^4\right).$$

Donc A est une formule d'approximation de la dérivée seconde $f''\,(x)$, qui est d'ordre 4.