USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Analyse numérique
2ème année Lic Maths

Série d'exercices n° 5 : Résolution d'équations non linéaires

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(x) = 0$ admet une racine réelle unique $\alpha \in]0,1[$.

b) Déterminer, par la méthode de dichotomie, une approximation de α à 10^{-1} près en utilisant le test d'arrêt $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. Comparer le nombre d'itérations effectif pour avoir cette précision avec le nombre $N = \left[\frac{\text{Log}\,\frac{b-a}{\varepsilon}}{\text{Log}\,2}\right] + 1 = 4$.

c) Effectuer deux itérations avec la méthode de Newton en démarrant de $x_0 = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 1

a) La fonction polynômiale f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on a $f(0)f(1) = (-1)(1) = -1 < 0$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule racine $\alpha \in]0,1[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

b) Posons $a_0 = a = 0, b_0 = b = 1$ et $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. En utilisant l'algorithme de dichotomie on obtient le tableau suivant :

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(a_n)f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$	Test d'arrêt
0	0	1	0.5	-1	-0.375	$+$		
1	0.5	1	0.75	-0.375	0.171875	$-$	0.25	continuer
2	0.5	0.75	0.625	-0.375	-0.130859375	$+$	-0.125	continuer
3	0.625	0.75	0.6875	-0.130859375	0.012451172	$-$	0.0625	stop

Alors l'approximation de α par la méthode de dichotomie est 0.6875.

Nous constatons que 3 le nombre d'itérations effectif pour avoir la précision $|x_{n+1} - x_n| \leq 0.1$ est inférieur à $N = \left[\frac{\text{Log}\,10}{\text{Log}\,2}\right] + 1 = 4$.

c) En utilisant l'algorithme de Newton $x_0 = 0.5$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1}$ on obtient le tableau suivant :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0.5	-0.375	1.75	0.7142857143
1	0.7142857143	0.078717201	2.530612245	0.6831797236

Alors l'approximation de α par la méthode de Newton avec deux itérations est 0.6831797236.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = e^x - x - 2.$$

1) Séparer graphiquement les racines de f.

2) Déterminer graphiquement deux intervalles d'existence des racines.

3) Résolution de $f(x) = 0$ par la méthode de dichotomie :

- **a)** Existe-t-il de racine sur l'intervalle $[0, 1.5]$
- **b)** Pour atteindre une précision $\varepsilon = 0.016$, combien faut-il d'itérations n pour trouver la racine sur l'intervalle $[0, 1.5]$.
- **c)** Calculer la racine pour l'intervalle $[0, 1.5]$ et $\varepsilon = 0.016$.

4) Résolution de $f(x) = 0$ par la méthode de Newton :

- **a)** Quelle est la condition suffisante pour la convergence de la méthode de Newton ?
- **b)** Est- elle vérifiée pour $x_0 = 1$? sinon peut-on trancher sur la convergence ?
- **c)** Trouver la racine pour $x_0 = 1$, pour $\varepsilon = 0.016$.

5) Comparer le résultat des deux méthodes.

6) Refaire les questions 3, 4 et 5 pour l'intervalle $[1, 2]$ pour $\varepsilon = 0.0003$, $x_0 = 1.5$, utiliser le critère d'arrêt pour la méthode de Newton $\dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$.

Solution de l'exercice 2

1) On a

$$f(x) = e^x - x - 2 = e^x - (x+2) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$f(x) = g(x) - h(x) = 0,$$

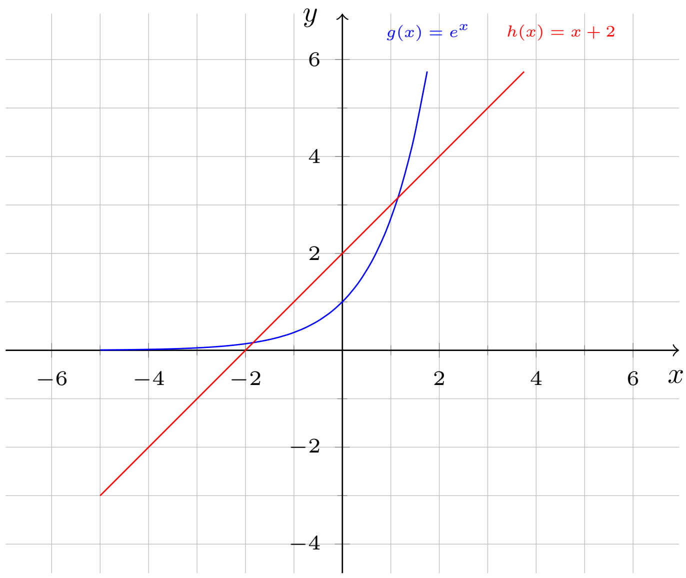
où

$$g(x) = e^x \quad \text{et} \quad h(x) = x + 2.$$

D'où

$$f(x) = 0 \ \text{ équivalent à } \ g(x) = h(x).$$

Alors les racines de f sont tous les points x d'intersection de la courbe de $g(x)$ avec celle de $h(x)$.



2) D'après le graphe ci-dessus, il existe deux racines $r_1 \in [-2, -1.5]$ et $r_2 \in [1, 1.5]$.

3) **Résolution de $f(x) = 0$ par la méthode de dichotomie :**

a) Vérification d'existence de racines sur $[0, 1.5]$: La fonction $f(x) = e^x - x - 2$ est continue sur $[0, 1.5]$, et on a

$$f(0) \cdot f(1.5) = (-1)\left(e^{1.5} - 3.5\right) \simeq -0.98 < 0.$$

Alors il existe au moins une racine $r \in [0, 1.5]$.

b) Pour atteindre une précision $\varepsilon = 0.016$, une solution x_n à l'itération n est supposée racine approchée si

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq \varepsilon,$$

ce qui implique

$$n \geq \frac{\text{Log}\left(\frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon}\right)}{\text{Log}\, 2} = \frac{\text{Log}\left(\frac{1.5}{0.032}\right)}{\text{Log}\, 2} \simeq 5.55\,.$$

Donc il faut au moins 6 itérations pour atteindre une précision $\varepsilon = 0.016$.

c)

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(a_n) f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$	Test d'arrêt
0	0	1.5	0.75	-1	-0.6330	$+$		
1	0.75	1.5	1.125	-0.6330	-0.0447	$+$	0.3750	continuer
2	1.125	1.5	1.3125	-0.0447	0.4029	$-$	0.1875	continuer
3	1.125	1.3125	1.21875	-0.0447	0.1642	$-$	0.0937	continuer
4	1.125	1.21875	1.171875	-0.0447	0.0559	$-$	0.0468	continuer
5	1.125	1.171875	1.1484375	-0.0447	0.0048	$-$	0.0234	continuer
6	1.125	1.1484375	1.1367188	-0.0447	-0.0202	$+$	0.0117	stop

Tout point de l'intervalle final $[1.13671, 1.14843]$ est solution du problème. On peut choisir le point milieu de cet intervalle comme solution, donc la racine approchée est :

$$r = \frac{x_6 + b_6}{2} = 1.14257.$$

4) Résolution de $f(x) = 0$ par la méthode de Newton :

a) La fonction $f \in \mathcal{C}^2([0.5, 1.5])$ et on a

- $f(0.5) f(1.5) \simeq -0.83 < 0$
- $f'(x) = e^x - 1 > 0$ sur l'intervalle $[0.5, 1.5]$
- $f''(x) = e^x > 0$ sur l'intervalle $[0.5, 1.5]$

Alors pour chaque $x_0 \in [0.5, 1.5]$ vérifiant

$$f(x_0) f''(x_0) > 0,$$

la méthode de Newton converge vers une racine $r \in [0.5, 1.5]$.

b) Pour $x_0 = 1$ on a

$$f(1) f''(1) = (e - 3) e < 0.$$

La condition $f(x_0) f''(x_0) > 0$ n'est pas vérifiée. On ne peut rien dire sur la convergence de la méthode pour $x_0 = 1$ car la condition est suffisante mais non nécessaire.

c) Pour $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ la formule de Newton s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dans notre cas on a $f(x) = e^x - x - 2$ et $f'(x) = e^x - 1$ alors la formule de Newton s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}.$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	Test d'arrêt
0	1	-0.28171817	1.7182818		
1	1.1639534	3.8615920×10^{-2}	2.2025693	0.1639534	continuer
2	1.1464212	4.8936957×10^{-4}	2.1469106	0.0175322	continuer
3	1.1461933			0.0002279	stop

5) Comparaison entre la méthode de dichotomie et la méthode de Newton :

La méthode de Newton est plus rapide (convergence quadratique) que celle de la dichotomie (convergence linéaire) elle est aussi plus précise.