USTHB 2021-2022 Semestre 1 — **Analyse numérique 1**

Faculté de Mathématiques — **2ème année Lic Maths**

Examen final - 30 janvier 2022. Durée : 1 h 30

Avant de commencer le test, lire et écrire sur votre copie de réponse la phrase suivante, puis signer.
Nantissement : Sur mon honneur, je ne vais pas, ni donner, ni demander de l'aide sur ce test. Signé.....

Exercice 1 (6 pts.) : L'espérance de vie dans l'Algérie pour les années $t_i = 2010, 2015$ et 2020 est donnée par la table

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	75.0	76.0	77.4

Pour simplifier, on a pris comme origine l'année 2010 *i.e.* $x_i = \dfrac{t_i - 2010}{5}$.

a) Déterminer le polynôme d'interpolation de f aux points $0, 1$ et 2 sur $[0, 2]$ en utilisant

(1) la formule de Lagrange **(2)** la formule de Newton.

b) Déduire une approximation de l'espérance de vie en 2017.

c) On suppose que $\max\limits_{0\leq x\leq 2} |f'''(x)| \leq 10^{-3}$, donner une estimation de l'erreur d'interpolation sur $[0, 2]$.

Indication : $\varepsilon_2(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercice 2 (4 points) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. On choisit le pas $h = \frac{1}{4}$.

Approcher $f'(1)$ en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées.

Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

Exercice 3 (5 points) : On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$.

a) Calculer la valeur exacte de I en utilisant 5 chiffres significatifs avec arrondi.

b) Évaluer cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $n = 3$ sous-intervalles.

c) Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à la valeur exacte ?

Est-ce vrai quelque soit n ? Justifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin.)

d) Quel nombre de sous-intervalles n faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ? On rappelle que l'erreur si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, est donnée par $\left| \int_a^b f(x)\,dx - h \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Exercice 4 (5 pts.) : L'objectif de cet exercice est de déterminer les zéros de la fonction $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer qu'il existe deux solutions $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

b) Peut-on appliquer la méthode de dichotomie, pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où c'est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-1}$ après avoir choisi un intervalle convenable.

c) Effectuer trois itérations avec la méthode de Newton en démarrant de $x_0 = \frac{\pi}{2}$.