Examen final - 31 janvier 2022. Durée : 1 h 30

Nom et Prénom :..

Matricule :...

/20

Exercice 1 (6 pts.) : L'espérance de vie dans l'Algérie pour les années $t_i = 2010, 2015$ et 2020 est donnée

par la table

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	75.0	76.0	77.4

Pour simplifier, on a pris comme origine l'année 2010 *i.e.* $x_i = \dfrac{t_i - 2010}{5}$.

a) Déterminer le polynôme d'interpolation de f aux points $0, 1$ et 2 sur $[0,2]$ en utilisant

(1) la formule de Lagrange **(2)** la formule de Newton.

b) Déduire une approximation de l'espérance de vie en 2017.

c) On suppose que $\max\limits_{0\leq x\leq 2} |f'''(x)| \leq 10^{-3}$, donner une estimation de l'erreur d'interpolation sur $[0,2]$.

Indication : $\varepsilon_2(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$.

Réponse.

a) Les points d'interpolation sont les points (x_i, y_i) avec $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$.

Il y a trois points, donc $n = 2$ et le polynôme d'interpolation est de degré 2.

(1) Le polynôme d'interpolation par la formule de Lagrange

On a $p_2(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x)$ où $\ell_i(x) = \prod\limits_{k=0,k\neq i}^{2} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$.

Calculons les polynômes ℓ_i : On a $\ell_0(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$.

De même $\ell_1(x) = -(x-0)(x-2)$ et $\ell_2(x) = \frac{1}{2}(x-0)(x-1)$.

Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Lagrange est

$p_2(x) = (75)\frac{1}{2}(x-1)(x-2) - (76)x(x-2) + (77.4)\frac{1}{2}x(x-1) = 0.2x^2 + 0.8x + 75.0$.

(2) Le polynôme d'interpolation par la formule de Newton

Le polynôme de Newton est

$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$.

Les coefficients du polynôme de Newton sont obtenus à partir du tableau des différences divisées ci-contre.

x_i	y_i	DD1	DD2
0	75.0		
1	76.0	1	
2	77.4	1.4	0.2

Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Newton est

$p_2(x) = 75.0 + x + 0.2x(x-1) = 0.2x^2 + 0.8x + 75.0$.

b) Approximation de l'espérance de vie en 2017. On a $x = \dfrac{2017-2010}{5} = \dfrac{7}{5} = 1.4$.

$f(1.4) \simeq p_2(1.4) = 0.2\,(1.4)^2 + 0.8\,(1.4) + 75.0 = 76.512.$

c) L'erreur théorique sur cette interpolation est donnée au point x par

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(x) = f(x) - p_2(x) &= \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi_x \in \left]0,2\right[\\ &= \frac{f'''(\xi_x)}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{f'''(\xi_x)}{6}\left(x^3-3x^2+2x\right).\end{aligned}$$

Comme $\max\limits_{0\leq x\leq 2}|f'''(x)| \leq 10^{-3}$ alors

$$|\varepsilon_2(x)| \leq \tfrac{10^{-3}}{6}\left|x^3-3x^2+2x\right|.$$

On pose $g_2(x) = x^3-3x^2+2x,\ x\in[0,2]$. On a $g_2'(x) = 3x^2-6x+2$, alors les deux racines de $g_2'(x)$ sont $\alpha_1 = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha_2 = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}|g_2(x)| &= \left|x^3-3x^2+2x\right| \\ &\leq \max\left(|g_2(\alpha_1)|, |g_2(\alpha_2)|, |g_2(0)|, |g_2(2)|\right) \\ &= \max\left(\left|\frac{2}{9}\sqrt{3}\right|, \left|-\frac{2}{9}\sqrt{3}\right|, 0, 0\right) \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\varepsilon_2(x)| \leq \tfrac{10^{-3}}{6}\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{27000} \simeq 6.415\times 10^{-5}.$$

Exercice 2 (4 points) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

On choisit le pas $h = \frac{1}{4}$.

Approcher $f'(1)$ en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées.

Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

Réponse.

Approximation de $f'(1)$.

Formule de différences progressives :

$$f'_p(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow f'_p(0) = \frac{f\left(\frac{5}{4}\right) - f(1)}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{16}{41} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{18}{41}.$$

Formule de différences régressives :

$$f'_r(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \longrightarrow f'_r(0) = \frac{f(1) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{16}{25}}{\frac{1}{4}} = -\frac{14}{25}.$$

Formule de différences centrées :

$$f'_c(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \longrightarrow f'_c(0) = \frac{f\left(\frac{5}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{16}{41} - \frac{16}{25}}{\frac{1}{2}} = -\frac{512}{1025}.$$

La dérivée de f est $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, alors la valeur exacte de $f'(1)$ est $-\dfrac{1}{2}$.

Pour l'erreur commise, on a

$$\begin{aligned}
E_r(prog.) &= \frac{\left|f'(1) - f'_p(1)\right|}{|f'(1)|} = \frac{\left|-\frac{1}{2} - \left(-\frac{18}{41}\right)\right|}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \frac{5}{41} \simeq 12.19\%, \\
E_r(reg.) &= \frac{\left|f'(1) - f'_r(1)\right|}{|f'(1)|} = \frac{\left|-\frac{1}{2} - \left(-\frac{14}{25}\right)\right|}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \frac{3}{25} = 12\%, \\
E_r(cent.) &= \frac{\left|f'(1) - f'_c(1)\right|}{|f'(1)|} = \frac{\left|-\frac{1}{2} - \left(-\frac{512}{1025}\right)\right|}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \frac{1}{1025} \simeq 0.097\%.
\end{aligned}$$

Exercice 3 (5 points) : On considère l'intégrale $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1} dx$.

a) Calculer la valeur exacte de I en utilisant 5 chiffres significatifs avec arrondi.

b) Évaluer cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $n = 3$ sous-intervalles.

c) Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à la valeur exacte ?

Est-ce vrai quelque soit n ? Justifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin.)

d) Quel nombre de sous-intervalles n faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ? On rappelle que l'erreur si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, est donnée par $\left| \int_a^b f(x)\,dx - h \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Réponse.

a) On a $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [\mathrm{Log}(x+1)]_0^1 = \mathrm{Log}\, 2 - \mathrm{Log}\, 1 \simeq 0.69315$.

b) On a $a = 0, b = 1, n = 3, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{3}, x_i = 0 + \frac{i}{3}, i = 0, ..., 3$ et $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

On obtient alors le tableau de données suivantes

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i+1}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$

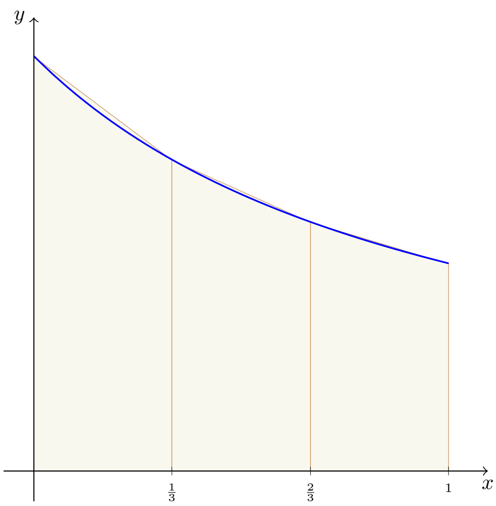
La méthode des trapèzes pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ s'écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T_n = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right).$$

Alors la valeur de $\mathrm{Log}\, 2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ par les méthodes des trapèzes est

$$T_3(f) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{2} f(x_i) + f(b) \right) = \frac{\frac{1}{3}}{2}\left(1 + 2\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{10} = 0.7 \ .$$

c) La valeur numérique obtenue à la question précédente est supérieure à la valeur exacte $\mathrm{Log}\, 2$ car la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}$ est convexe. On peut se convaincre à l'aide d'un dessin que les trapèzes sont au-dessus de la courbe $y = \frac{1}{x+1}$, l'aire sous les trapèzes sera donc supérieure à l'aire sous la courbe.



Cela reste vrai quelque soit le pas h choisi car la fonction est convexe ce qui signifie qu'une corde définie par deux points de la courbe $y = \frac{1}{x+1}$ sera toujours au-dessus de la courbe et par le raisonnement précédant l'aire sous les trapèzes sera supérieure à l'aire exacte.

d) L'erreur est majorée par

$$|E_3| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Donc ici on a $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, ainsi

$$|E_3| \leq \frac{1}{12n^2} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{2}{(x+1)^3} \right| = \frac{1}{6n^2}.$$

Pour que $|E_3| < 10^{-4}$ il suffit que $\dfrac{1}{6n^2} < 10^{-4}$, *i.e.* $n > \dfrac{100}{\sqrt{6}} \simeq 40.82$. À partir de 41 sous-intervalles, l'erreur est inférieure à 10^{-4}.

Exercice 4 (5 pts.) : L'objectif de cet exercice est de déterminer les zéros de la fonction $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer qu'il existe deux solutions $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

b) Peut-on appliquer la méthode de dichotomie, pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où c'est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-1}$ après avoir choisi un intervalle convenable.

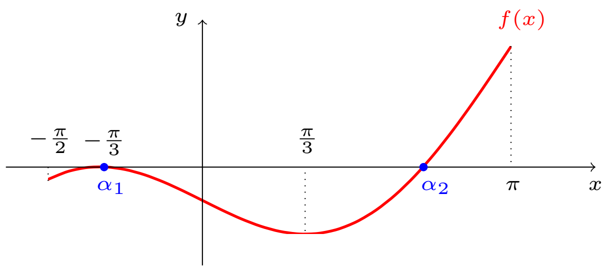
c) Effectuer trois itérations avec la méthode de Newton en démarrant de $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Réponse.

a) Étude de la fonction f :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$;
- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \simeq -0.1278 < 0$, $\quad f(0) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq -0.3424 < 0$, $\quad f(\pi) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.2283 > 0$;
- $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$;
- f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$;
- $x = -\frac{\pi}{3}$ est un maximum local et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$ est un minimum local et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$;
- $f''(x) = \sin x$;
- f est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, convexe sur $[0, \pi]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f(x)$	-0.1278	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	-0.6848	$\nearrow$	1.2283



Par conséquence $\alpha_1 = -\frac{\pi}{3}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et il existe une et une seule α_2 solution de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [0, \pi]$. On peut même améliorer l'encadrement et conclure que $\alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

b) La méthode de dichotomie ne peut pas être utilisée pour approcher α_1 car il est impossible de trouver un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}^-$ sur lequel $f(a) f(b) < 0$. En ce qui concerne l'approximation de α_2, en partant de $[a, b] = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, la méthode de dichotomie converge en $\left[\frac{\mathrm{Log}\,\frac{b-a}{\varepsilon}}{\mathrm{Log}\,2}\right] = 4$ itérations vers la valeur 2.225294796.

c) La méthode de Newton est

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\pi}{2}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{\frac{x_n}{2} - \sin x_n + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \cos x_n}. \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme de Newton on obtient le tableau suivant

x_0	x_1	x_2	x_3
1.570796327	2.684853256	2.284869134	2.246505219