USTHB 2014-2015 Semestre 2 | **Analyse numérique élémentaire**

Faculté de Mathématiques | **Deuxième année Lic. Ing. Stat.**

Examen final - 30 mai 2015. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom et Prénom :..... .....

Matricule :..... **Groupe :**.....

/ **20**

Exercice 1 (5 points) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Déterminer le polynôme d'interpolation de f aux points $0, \frac{1}{2}$ et 1 sur $[0,1]$ en utilisant

(1) la formule de Lagrange **(2)** la formule de Newton.

b) Donner une approximation de $f\left(\frac{1}{4}\right)$. Calculer l'erreur relative pour cette approximation.

Réponse.

Exercice 2 (4 points) :

a) Déterminer par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson $\int_0^2 f(x)\,dx$ pour tableau suivant :

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{1+x_i^2}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{5}$

b) Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

Réponse.

Exercice 3 (4 points) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On choisit le pas $h = \frac{1}{2}$.

a) Approcher $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées.

Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

b) Approcher $f''\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant la formule d'approximation $f''(x) \simeq \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

Réponse.

Exercice 4 (4 points) : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(x) = 0$ admet une racine réelle unique $\alpha \in]0, 1[$.

b) Déterminer, par la méthode de dichotomie, une approximation de α à 10^{-1} près en utilisant le test d'arrêt $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. Comparer le nombre d'itérations effectif pour avoir cette précision avec le nombre $N = \left[\frac{\text{Log}\,\frac{b-a}{\varepsilon}}{\text{Log}\,2}\right] + 1 = 4$.

c) Effectuer deux itérations avec la méthode de Newton en démarrant de $x_0 = \frac{1}{2}$.

Réponse.

Suite de l'exercice 4 (3 points)

d) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que

(1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \forall x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, **(2)** $\varphi\left(\left[\frac{1}{4}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ et **(3)** $\sup\limits_{\left[\frac{1}{4},1\right]} |\varphi'| = k < 1$.

- En déduire la convergence de l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n), x_0 \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ vers α.
- Calculer x_2 en démarrant de $x_0 = \frac{1}{2}$.

e) Calculer l'erreur absolue commise lors du calcul de α dans les questions précédentes, sachant que la valeur exacte de α avec dix chiffres significatifs est 0.6823278038 .

Réponse.