



Nom et Prénom :

Matricule : Groupe :

20

Exercice 1 (5 points) : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Déterminer le polynôme d'interpolation de f aux points $0, \frac{1}{2}$ et 1 sur $[0, 1]$ en utilisant

(1) la formule de Lagrange (2) la formule de Newton.

b) Donner une approximation de $f\left(\frac{1}{4}\right)$. Calculer l'erreur relative pour cette approximation.

Réponse.

a) Les points d'interpolation sont les points (x_i, y_i) avec $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$.

On obtient alors le tableau de données suivantes

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$y_i = f(x_i) = \frac{1}{1+x_i^2}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$

Il y a trois points, donc $n = 2$ et le polynôme d'interpolation est de degré 2.

(1) Le polynôme d'interpolation par la formule de Lagrange

On a $P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$, où $L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^2 \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$.

Calculons les polynômes L_i : On a $L_0(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right) \left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$,

$L_1(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right) \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) = -4x(x-1)$ et $L_2(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right) \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Lagrange est

$$P_2(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) - \frac{16}{5}x(x-1) + x\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

(2) Le polynôme d'interpolation par la formule de Newton

Le polynôme de Newton est $P_2(x) = f(x_0) + \delta[x_0, x_1](x - x_0) + \delta^2[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$.

Les coefficients du polynôme de Newton sont obtenus à partir du tableau des différences divisées ci-contre. Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Newton est $P_2(x) = 1 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}x\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Et sous forme de Horner est $P_2(x) = 1 + x\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$.

x_i	y_i	DD1	DD2
0	1		
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$

b) Approximation de $f\left(\frac{1}{4}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \simeq P_2\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{73}{80} = 0.9125.$$

$$\text{Pour l'erreur relative on a } e_R\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\left|f\left(\frac{1}{4}\right) - P_2\left(\frac{1}{4}\right)\right|}{\left|f\left(\frac{1}{4}\right)\right|} = \frac{\left|\frac{16}{17} - \frac{73}{80}\right|}{\left|\frac{16}{17}\right|} = \frac{\frac{39}{1360}}{\frac{16}{17}} = \frac{39}{1280} = 3.0469 \times 10^{-2} \simeq 3.05\%.$$

Exercice 2 (4 points) :

a) Déterminer par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson $\int_0^2 f(x) dx$ pour tableau suivant :

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y_i = f(x_i) = \frac{1}{1+x_i^2}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{5}$

b) Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

Réponse.

a) On a $a = 0, b = 2, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}, n = 4$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Calculons $\text{Arctg } 2 = \int_0^2 f(x) dx$ par les méthodes des trapèzes et de Simpson.

On a

$$\begin{aligned} T_4(f) &= \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^3 f(x_i) + f(b) \right) = \frac{\frac{1}{2}}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{13} \right) + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{209}{65} + \frac{1}{5} \right) = \frac{287}{260} \simeq 1.103846154, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \frac{h}{3} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1, i \text{ pair}}^3 f(x_i) + 4 \sum_{i=1, i \text{ impair}}^3 f(x_i) + f(b) \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{3} \left(1 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{13} \right) + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + 1 + \frac{288}{65} + \frac{1}{5} \right) = \frac{431}{390} \simeq 1.105128205. \end{aligned}$$

b) Pour l'erreur relative, on a

$$\begin{aligned} e_R(T_4) &= \frac{|I(f) - T_4(f)|}{|I(f)|} = \frac{|\text{Arctg}(2) - 1.103846154|}{|\text{Arctg } 2|} = \frac{|1.107148718 - 1.103846154|}{1.107148718} \\ &= \frac{0.003302564}{1.107148718} \simeq 0.00298 \simeq 0.30\% \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e_R(S_4) &= \frac{|I(f) - S_4(f)|}{|I(f)|} = \frac{|\text{Arctg}(2) - 1.105128205|}{|\text{Arctg } 2|} = \frac{|1.107148718 - 1.105128205|}{1.107148718} \\ &= \frac{0.002020513}{1.107148718} \simeq 0.00182 \simeq 0.18\%. \end{aligned}$$

Exercice 3 (4 points) : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On choisit le pas $h = \frac{1}{2}$.

a) Approcher $f'(\frac{1}{2})$ en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées.

Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

b) Approcher $f''(\frac{1}{2})$ en utilisant la formule d'approximation $f''(x) \simeq \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

Réponse.

a) Approximation de $f'(\frac{1}{2})$.

Formule de différences progressives :

$$f'_p(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow f'_p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{5}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{5}.$$

Formule de différences régressives :

$$f'_r(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \rightarrow f'_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{5} - 1}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}.$$

Formule de différences centrées :

$$f'_c(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \rightarrow f'_c\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

La dérivée de f est $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, alors la valeur exacte de $f'(\frac{1}{2})$ est $-\frac{16}{25}$.

Pour l'erreur commise, on a

$$\begin{aligned} e_R(DP) &= \frac{|f'(\frac{1}{2}) - f'_p(\frac{1}{2})|}{|f'(\frac{1}{2})|} = \frac{|-\frac{16}{25} - (-\frac{3}{5})|}{|-\frac{16}{25}|} = \frac{1}{16} = 6.25\%, \\ e_R(DR) &= \frac{|f'(\frac{1}{2}) - f'_r(\frac{1}{2})|}{|f'(\frac{1}{2})|} = \frac{|-\frac{16}{25} - (-\frac{2}{5})|}{|-\frac{16}{25}|} = \frac{3}{8} = 37.5\%, \\ e_R(DC) &= \frac{|f'(\frac{1}{2}) - f'_c(\frac{1}{2})|}{|f'(\frac{1}{2})|} = \frac{|-\frac{16}{25} - (-\frac{1}{2})|}{|-\frac{16}{25}|} = \frac{7}{32} = 21.875\%. \end{aligned}$$

b) Approximation de $f''(\frac{1}{2})$.

$$\text{On a } f''\left(\frac{1}{2}\right) \simeq \frac{f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) - 2f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{f(1) - 2f(\frac{1}{2}) + f(0)}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{1}{2} - 2\left(\frac{4}{5}\right) + 1\right) = -\frac{2}{5}.$$

Exercice 4 (4 points) : On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $f(x) = 0$ admet une racine réelle unique $\alpha \in]0, 1[$.
- Déterminer, par la méthode de dichotomie, une approximation de α à 10^{-1} près en utilisant le test d'arrêt $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. Comparer le nombre d'itérations effectif pour avoir cette précision avec le nombre $N = \left\lceil \frac{\log \frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2} \right\rceil + 1 = 4$.
- Effectuer deux itérations avec la méthode de Newton en démarrant de $x_0 = \frac{1}{2}$.

Réponse.

- La fonction polynômiale f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on a $f(0)f(1) = (-1)(1) = -1 < 0$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule racine $\alpha \in]0, 1[$ telle que $f(\alpha) = 0$.
- Posons $a_0 = a = 0, b_0 = b = 1$ et $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. En utilisant l'algorithme de dichotomie on obtient le tableau suivant :

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(a_n)f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$	Test d'arrêt
0	0	1	0.5	-1	-0.375	+		
1	0.5	1	0.75	-0.375	0.171875	-	0.25	continuer
2	0.5	0.75	0.625	-0.375	-0.130859375	+	-0.125	continuer
3	0.625	0.75	0.6875	-0.130859375	0.012451172	-	0.0625	stop

Alors l'approximation de α par la méthode de dichotomie est 0.6875.

Nous constatons que 3 le nombre d'itérations effectif pour avoir la précision $|x_{n+1} - x_n| \leq 0.1$ est inférieur à $N = \left\lceil \frac{\log 10}{\log 2} \right\rceil + 1 = 4$.

- En utilisant l'algorithme de Newton $x_0 = 0.5, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1}$ on obtient le tableau suivant :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0.5	-0.375	1.75	0.7142857143
1	0.7142857143	0.078717201	2.530612245	0.6831797236

Alors l'approximation de α par la méthode de Newton avec deux itérations est 0.6831797236.

Suite de l'exercice 4 (3 points)

d) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que

(1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \forall x \in [\frac{1}{4}, 1]$, (2) $\varphi([\frac{1}{4}, 1]) \subset [\frac{1}{4}, 1]$ et (3) $\sup_{[\frac{1}{4}, 1]} |\varphi'| = k < 1$.

- En déduire la convergence de l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n), x_0 \in [\frac{1}{4}, 1]$ vers α .
- Calculer x_2 en démarrant de $x_0 = \frac{1}{2}$.

e) Calculer l'erreur absolue commise lors du calcul de α dans les questions précédentes, sachant que la valeur exacte de α avec dix chiffres significatifs est 0.6823278038 .

Réponse.

d)

(1) Pour $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ on a $x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow x = \varphi(x)$.

(2) On a $\varphi'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \leq 0 \forall x \in [\frac{1}{4}, 1]$, alors $\varphi([\frac{1}{4}, 1]) = [\varphi(1), \varphi(\frac{1}{4})] = [\frac{1}{2}, \frac{16}{17}] \subset [\frac{1}{4}, 1]$.

(3) On a $\varphi''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$, donc $\varphi''(x) = 0$ on $[\frac{1}{4}, 1]$ si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{[\frac{1}{4}, 1]} |\varphi'| &= \max \left\{ \left| \varphi' \left(\frac{1}{4} \right) \right|, \left| \varphi' \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right|, |\varphi'(1)| \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{128}{289}, \frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \simeq 0.65 < 1. \end{aligned}$$

- D'après le théorème de convergence du point fixe, l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n), x_0 \in [\frac{1}{4}, 1]$ converge vers la racine de l'équation $f(x) = 0$.

- Si $x_0 = 0.5$, alors $x_1 = \varphi(0.5) = \frac{1}{1+0.5^2} = 0.8$ et $x_2 = \varphi(0.8) = \frac{1}{1+0.8^2} = 0.6097560976$.

e) On a

$$e_A(\text{dichotomie}) = |0.6823278038 - 0.6875| = 0.0051721962 ,$$

$$e_A(\text{Newton}) = |0.6823278038 - 0.6831797236| = 0.0008519198 ,$$

$$e_A(\text{point fixe}) = |0.6823278038 - 0.6097560976| = 0.0725717062 .$$