USTHB 2014-2015 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Test n^{0}1 - 11 avril 2015.

Analyse numérique élémentaire
2$^{\text{ème}}$ année Lic. Ing. Stat.

Durée : 30 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (15 pts.) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

(1) Calculer le polynôme d'interpolation de f aux points $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en utilisant

(a) la formule de Lagrange **(b)** la formule de Newton.

(2) **(a)** Donner une approximation de $f\left(\frac{1}{8}\right)$ et $f\left(\frac{3}{8}\right)$.

(b) Étudier l'erreur d'interpolation en ces points.

==

Réponse.

(1) Les points d'interpolation sont les points (x_i, y_i) avec $y_i = f(x_i)$, $i = 0, ..., 4$.

On obtient alors le tableau de données suivantes

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y_i = \sin(\pi x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Il y a cinq points, donc $n = 4$ et le polynôme d'interpolation est de degré 4.

(a) Le polynôme d'interpolation par la formule de Lagrange

On a

$$P_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x),$$

où $L_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{4} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$.

Calculons les polynômes L_i.

$$L_0(x) = \left(\tfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\tfrac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)\left(\tfrac{x-x_3}{x_0-x_3}\right)\left(\tfrac{x-x_4}{x_0-x_4}\right) = 144\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right),$$
$$L_1(x) = \left(\tfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\tfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)\left(\tfrac{x-x_3}{x_1-x_3}\right)\left(\tfrac{x-x_4}{x_1-x_4}\right) = -1296x\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right),$$
$$L_2(x) = \left(\tfrac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\left(\tfrac{x-x_3}{x_2-x_3}\right)\left(\tfrac{x-x_4}{x_2-x_4}\right) = 2304x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right),$$
$$L_3(x) = \left(\tfrac{x-x_0}{x_3-x_0}\right)\left(\tfrac{x-x_1}{x_3-x_1}\right)\left(\tfrac{x-x_2}{x_3-x_2}\right)\left(\tfrac{x-x_4}{x_3-x_4}\right) = -1296x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right),$$
$$L_4(x) = \left(\tfrac{x-x_0}{x_4-x_0}\right)\left(\tfrac{x-x_1}{x_4-x_1}\right)\left(\tfrac{x-x_2}{x_4-x_2}\right)\left(\tfrac{x-x_3}{x_4-x_3}\right) = 144x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right).$$

Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Lagrange est

$$\begin{aligned} P_4(x) = & -648x\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+1152\sqrt{2}x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) \\ & -648\sqrt{3}x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+144x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

(b) <u>Le polynôme d'interpolation par la formule de Newton</u>

Le polynôme de Newton est

$$\begin{aligned} P_4(x) = & f(x_0)+\delta[x_0,x_1](x-x_0)+\delta^2[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ & +\delta^3[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & +\delta^4[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \end{aligned}$$

Les coefficients du polynôme de Newton sont obtenus à partir du tableau des différences divisées.

x_i	y_i	DD1	DD2	DD3	DD4
0	0				
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	3			
$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$6\sqrt{2}-6$ (2.4853)	$24\sqrt{2}-36$ (-2.0589)		
$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$ (1.9070)	$36\sqrt{3}-72\sqrt{2}+36$ (-3.4695)	$108\sqrt{3}-288\sqrt{2}+216$ (-4.2320)	
$\frac{1}{2}$	1	$6-3\sqrt{3}$ (0.80385)	$24-36\sqrt{3}+24\sqrt{2}$ (-4.4127)	$-36-216\sqrt{3}+288\sqrt{2}$ (-2.8295)	$-504-648\sqrt{3}+1152\sqrt{2}$ (2.8051)

Alors le polynôme d'interpolation sous forme de Newton est

$$\begin{aligned} P_4(x) = & 3x+\left(24\sqrt{2}-36\right)x\left(x-\tfrac{1}{6}\right) \\ & +\left(108\sqrt{3}-288\sqrt{2}+216\right)x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right) \\ & +\left(-504-648\sqrt{3}+1152\sqrt{2}\right)x\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Et sous forme de Horner est

$$\begin{aligned} & P_4(x) = \\ & x\left(3+\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(24\sqrt{2}-36+\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(108\sqrt{3}-288\sqrt{2}+216+\left(-504-648\sqrt{3}+1152\sqrt{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\right)\right)\right) \\ & = x\left(3+\left(x-\tfrac{1}{6}\right)\left(-2.0589+\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\left(-4.2320+2.8051\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

(2) **(a)** Approximation de $f\left(\frac{1}{8}\right)$ et $f\left(\frac{3}{8}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{8}\right) \simeq P_4\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)\left(3 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right)\left(-2.0589 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)\left(-4.2320 + 2.8051\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right)\right)\right)\right) = 0.38259.$$

$$f\left(\frac{3}{8}\right) \simeq P_4\left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(3 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6}\right)\left(-2.0589 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)\left(-4.2320 + 2.8051\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{3}\right)\right)\right)\right) = 0.92396.$$

(b) Erreur d'interpolation.

$$e_R\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\left|P_4\left(\frac{1}{8}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)\right|}{\left|f\left(\frac{1}{8}\right)\right|} = \frac{\left|0.38259 - \sin\frac{\pi}{8}\right|}{\left|\sin\frac{\pi}{8}\right|} = \frac{|0.38259 - 0.38268|}{0.38268} = 2.3518 \times 10^{-4} \simeq 0.024\%.$$

$$e_R\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{\left|P_4\left(\frac{3}{8}\right) - f\left(\frac{3}{8}\right)\right|}{\left|f\left(\frac{3}{8}\right)\right|} = \frac{\left|0.92396 - \sin\frac{3\pi}{8}\right|}{\left|\sin\frac{3\pi}{8}\right|} = \frac{|0.92396 - 0.92388|}{0.92388} = 8.6591 \times 10^{-5} \simeq 0.0087\%.$$