



Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (5 pts.) :

Donner l'équation de la droite de la régression linéaire $y = ax + b$ par la méthode des moindres carrés pour le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	5	7	6	9

Indication : $a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ avec $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

Réponse.

On a $n = 5$, $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$ et $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} (3 + 5 + 7 + 6 + 9) = 6$.

Ensuite, nous aurons le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	5	7	6	9
$x_i - \bar{x}$	-2	-1	0	1	2
$y_i - \bar{y}$	-3	-1	1	0	3
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	6	1	0	0	6
$(x_i - \bar{x})^2$	4	1	0	1	4

Alors $a = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{6 + 1 + 0 + 0 + 6}{4 + 1 + 0 + 1 + 4} = \frac{13}{10} = 1.3$ et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 6 - \frac{13}{10} \times 3 = \frac{21}{10} = 2.1$.

Par conséquent, la droite de la régression linéaire est $y = \frac{13}{10}x + \frac{21}{10}$ ou $y = 1.3x + 2.1$.

=====

Exercice 2 (6 pts.) :

Calculer $\text{Log}(4) = \int_1^4 \frac{1}{x} dx$ par les méthodes d'intégration des trapèzes et de Simpson pour $n = 6$.

Calculer l'erreur commise dans chaque cas.

=====

Réponse. On a $a = 1, b = 4, n = 6, h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i h, 0 \leq i \leq n$ et $f(x) = \frac{1}{x}$.

Donc $h = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}, x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = 3, x_5 = \frac{7}{2}$ et $x_6 = 4$.

Alors on a le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$

Calculons $\text{Log}(4) = \int_1^4 \frac{1}{x} dx$ par les méthodes des trapèzes et de Simpson. On a

$$\begin{aligned} T_6(f) &= \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^5 f(x_i) + f(b) \right] = \frac{\frac{1}{2}}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \right) + \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{153}{35} + \frac{1}{4} \right] = \frac{787}{560} \simeq 1.405357143, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_6(f) &= \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1, i \text{ pair}}^5 f(x_i) + 4 \sum_{i=1, i \text{ impair}}^5 f(x_i) + f(b) \right] \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{3} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + 4 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} \right) + \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[1 + \frac{5}{3} + \frac{568}{105} + \frac{1}{4} \right] = \frac{3497}{2520} \simeq 1.387698413. \end{aligned}$$

Pour l'erreur commise, on a

$$\begin{aligned} e_R(T_6) &= \frac{|I(f) - T_6(f)|}{|I(f)|} = \frac{|\text{Log}(4) - 1.405357143|}{|\text{Log}(4)|} = \frac{|1.386294361 - 1.405357143|}{1.386294361} \\ &= \frac{0.019062782}{1.386294361} \simeq 0.0138 = 1.38\% \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e_R(S_6) &= \frac{|I(f) - S_6(f)|}{|I(f)|} = \frac{|\text{Log}(4) - 1.387698413|}{|\text{Log}(4)|} = \frac{|1.386294361 - 1.387698413|}{1.386294361} \\ &= \frac{0.001404052}{1.386294361} \simeq 0.0010 = 0.10\%. \end{aligned}$$

=====

Exercice 3 (4 pts.) :

Approcher $f'(3)$ en utilisant les formules de différences progressives, régressives et centrées pour le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Calculer l'erreur commise dans chaque cas.

=====

Réponse.

Formule de différences progressives :

$$f'_p(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \longrightarrow f'_p(3) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{4 - 3} = -\frac{1}{12}.$$

Formule de différences régressives :

$$f'_r(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \longrightarrow f'_r(3) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{3 - 2} = -\frac{1}{6}.$$

Formule de différences centrées :

$$f'_c(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} \longrightarrow f'_c(3) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{4 - 2} = -\frac{1}{8}.$$

La dérivée de f est $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$, alors la valeur exacte de $f'(3)$ est $-\frac{1}{9}$.

Pour l'erreur commise, on a

$$\begin{aligned} e_R(DP) &= \frac{|f'(3) - f'_p(3)|}{|f'(3)|} = \frac{\left| -\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{12} \right) \right|}{\left| -\frac{1}{9} \right|} = \frac{1}{4} = 25\%, \\ e_R(DR) &= \frac{|f'(3) - f'_r(3)|}{|f'(3)|} = \frac{\left| -\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{6} \right) \right|}{\left| -\frac{1}{9} \right|} = \frac{1}{2} = 50\%, \\ e_R(DC) &= \frac{|f'(3) - f'_c(3)|}{|f'(3)|} = \frac{\left| -\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{8} \right) \right|}{\left| -\frac{1}{9} \right|} = \frac{1}{8} = 12.5\%. \end{aligned}$$