Série d'exercices n° 2 : Interpolation polynômiale

Exercice 1 : Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$.

Le polynôme P peut être réécrit par l'algorithme de Horner sous la forme

$$P(x) = x(x(x(x(x-15)+85)-225)+274)-120.$$

a) Déterminer la valeur exacte de $P(2.5)$ par calcul direct et par l'algorithme de Horner.

b) Calculer les valeurs approchées de $P(2.5)$ en utilisant 3 chiffres significatifs avec arrondi pour tous les calculs. Faire un calcul d'erreur.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

Utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange avec $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ pour obtenir une approximation des valeurs $f(2)$ et $f(2.4)$. Donner l'erreur relative pour chaque approximation.

Exercice 3 : La contrainte de cisaillement en kilo Pascal dans une strate d'argile varie avec la profondeur h en mètre. Utiliser les mesures expérimentales ci-contre pour évaluer τ à $h = 4.5m$ en utilisant le polynôme d'interpolation sous forme de Lagrange.

$h\,(m)$	2	3	5	7
$\tau\,(kPa)$	18	35	75	163

Exercice 4 : Utiliser le polynôme d'interpolation sous forme de Newton et les valeurs $\sin 0$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$ pour évaluer $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Donner le polynôme sous la forme de Horner. Comparer avec la solution exacte.

Exercice 5 : Le tableau suivant fournit les valeurs mesurées de la densité d'eau de mer $\rho\,(kg/m^3)$ en fonction de la tempréature T (degrés Celsius). Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton et utiliser le pour évaluer la densité pour une température $T = 10^0C$.

$T\,(^0C)$	4	8	12	16	20
$\rho\,(kg/m^3)$	1000.7794	1000.6427	1000.2805	999.7165	998.9700

Exercice 6 : Utiliser un polynôme de degré 2 pour approximer la fonction $f(x) = \ln(x+1)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Les noeuds d'interpolation sont $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, et $x_2 = 1$. Estimer l'erreur faite en approximant $f(0.3)$ par $P_2(0.3)$. Comparer avec l'erreur exacte.

Exercice 7 : Soit $f \in \mathcal{C}^4([-2,4])$ telle que $f(-2) = -14, f(-1) = -\frac{11}{4}, f(2) = -8$ et $f(4) = -29$.

(1) Calculer le polynôme d'interpolation de f aux points $-2, -1, 2$ et 4 sur $[-2,4]$ en utilisant

(a) un système linéaire **(b)** la formule de Lagrange **(c)** la formule de Newton.

(2) (a) Donner une approximation de $f(0), f(1)$ et $f(3)$.

(b) Étudier l'erreur d'interpolation en ces points sachant que $\left|f^{(4)}\right| \leq 10^{-2}$ sur $[-2,4]$.