U.S.T.H.B. 2014-2015 Semestre 2 — Analyse numérique élémentaire

Faculté de Mathématiques — $2^{\text{ème}}$ année Lic. Ing. Stat.

Série d'exercices n° 3 : Approximation au sens des moindres carrés

Exercice 1 :

(a) Écrire le problème de la régression linéaire comme un problème de moindres carrés : plus précisément on se donne une famille de points (x_i, y_i), $i = 1, ..., m$ (les x_i étant distincts) et on cherche à faire passer une droite le plus près possible de ces points.

(b) La question précédente conduit à une fonction de deux variables à minimiser. On admet que ce minimum est donné en annulant les deux dérivées partielles. Donner puis résoudre le système linéaire de deux équations à deux inconnues ainsi obtenu.

(c) Donner l'équation de la droite de la régression linéaire par la méthode des moindres carrés pour le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	40	42	44	45	48	50	52	55	58	63	68	70

Exercice 2 : Soient $f(x) = |x|$ et $\langle g, h\rangle = \sum_{i=0}^{4} g(x_i)\, h(x_i)$, $\forall g, h \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ où

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2} \text{ et } x_4 = 1.$$

(a) Déterminer le polynôme P de $\mathcal{P}_2$ qui réalise la meilleure approximation de f au sens des moindres carrés, où $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2.

(b) Vérifier que $Q(x) = \frac{7}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^4$ est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_i, i = 0, ..., 4$.

(c) Dans un même repère, tracer les graphes de f, P et Q sur $[-1, 1]$. Commenter.

(d) Trouver le polynôme P^* de $\mathcal{P}_2$ qui réalise le minimum suivant :

$$\min_{P \in \mathcal{P}_2} \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{1 + x_i^2} \left(f(x_i) - P(x_i)\right)^2.$$