USTHB 2014-2015 Semestre 2 | **Analyse numérique élémentaire**
Faculté de Mathématiques | **$2^{\text{ème}}$ année Lic. Ing. Stat.**

Série d'exercices n° 6 : Résolution des équations non linéaires

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

1. Séparer les racines de f, puis montrer que $f(x) = 0$ admet une solution réelle unique $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

2. Déterminer, par la dichotomie, une approximation de α à 5×10^{-2} près en utilisant le test d'arrêt $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. Déterminer le nombre d'itérations suffisant pour avoir cette précision en utilisant la formule de l'erreur. Commenter.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - x - 2$, on se propose de trouver les racines réelles de f par la méthode des approximations successives.

1. Montrer que $f(x) = 0$ possède une seule racine réelle $\alpha \in]1, 2[$.

2. Étudier la convergence des méthodes itératives suivantes : $x_0 \in [1, 2]$ donné et

$$\textbf{(a)} \quad x_{n+1} = 2x_n^3 - 2 \quad ; \quad \textbf{(b)} \quad x_{n+1} = \frac{2}{2x_n^2 - 1}.$$

Exercice 3 :

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet trois racines réelles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans $[0, 4]$.

2. Séparer les racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ puis en donner des valeurs approchées par la méthode de Newton à 6 chiffres.

3. En posant $x = t + \frac{5}{3}$ dans $f(x) = 0$ puis $t = \lambda + \mu$ déduire les valeurs exactes des racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ainsi qu'un développement décimal à 6 chiffres. Comparer avec les valeurs approchées.

Exercice 4 :

Soit l'équation $\operatorname{Log} x = 2 - x$.

1. Montrer que cette équation admet une solution unique α dans l'intervalle $]1, 2[$.

2. Étudier l'itération $x_0 \in [1, 2]$ donné, $x_{n+1} = 2 - \operatorname{Log} x_n$ et montrer que cette itération converge vers α.

3. Montrer que l'équation proposée est équivalente à l'équation $x = e^{2-x}$, et étudier l'itération $x_0 \in [1, 2]$ donné, $x_{n+1} = e^{2-x_n}$. Qu'en déduisez-vous?

4. Écrire la méthode de Newton pour l'équation proposée et proposer un bon choix d'initialisation x_0 de cette méthode.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1, x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution réelle unique $\alpha \in]1, 2[$.

2. Déterminer, par la dichotomie, une approximation de α à 10^{-3} près en utilisant le test d'arrêt $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ puis le test $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. Comparer le nombre d'itérations effectif pour avoir cette précision avec le nombre $N = \left[\dfrac{\operatorname{Log} \frac{b-a}{\varepsilon}}{\operatorname{Log} 2} \right] + 1$.

3. Trouver un intervalle fermé $I \subset [1, 2]$ et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \forall x \in I, \varphi(I) \subset I \text{ et } \sup_I |\varphi'| = k < 1.$$
En déduire la convergence de l'itération $x_{n+1} = \varphi(x_n), x_0 \in I$ vers α.

4. Donner une majoration de l'erreur $e_n = |x_n - \alpha|, n \in \mathbb{N}^*$ et déterminer le nombre d'itérations suffisant pour avoir $|x_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ sachant que $x_0 = 1.5$.

5. Écrire l'algorithme de Newton pour le calcul de α puis effectuer cinq itérations avec, commençant en $x_0 = 1.5$ et comparer avec le résultat de la question 2.

6. En posant $x = t + \frac{1}{3}$ dans $f(x) = 0$ puis $t = \lambda + \mu$ avec $\lambda\mu = \frac{4}{9}$, montrer que λ^3 et μ^3 sont solutions de $s^2 - \frac{38}{27}s + \left(\frac{4}{9}\right)^3 = 0$.
En déduire la valeur exacte de α. Comparer avec les résultats des questions 2 et 5.